Se tocco comprendo

I numeri e le mani da sempre grandi amici

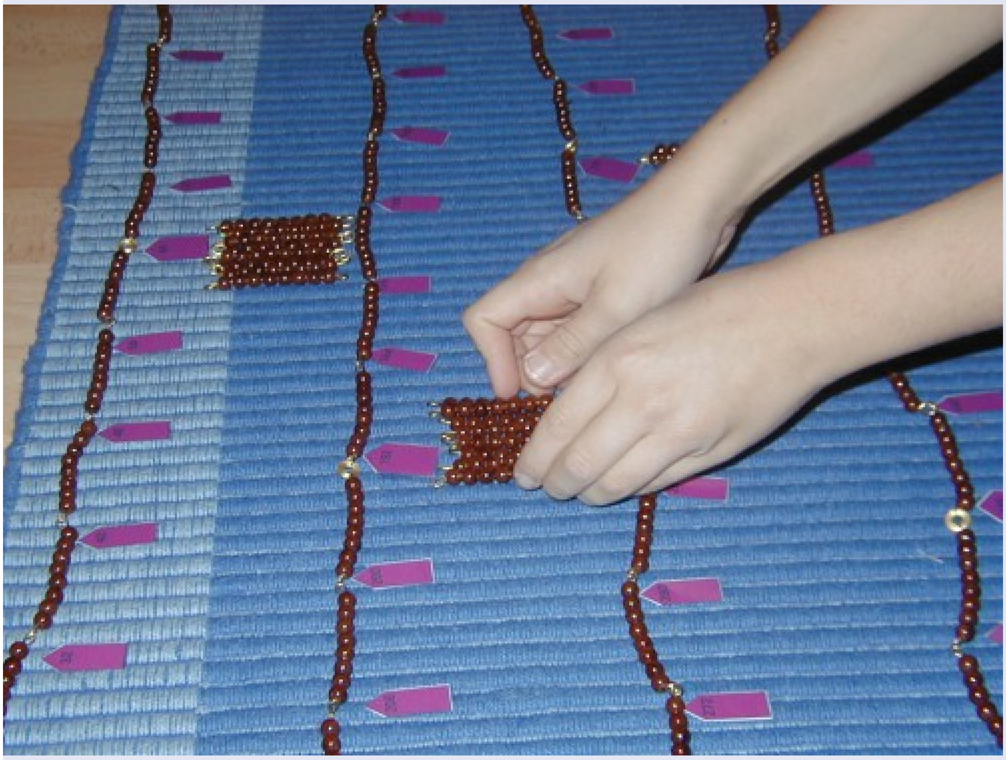
Salò — Sala dei Provveditori — 25 gennaio 2013 ore 20:30

Da un punto di vista un po' inusuale, quello di chi si occupa di rendere visibili i numeri prodotti in grande quantità sui supercomputer del Centro Svizzero di Calcolo Scientifico, getteremo uno sguardo su alcuni aspetti poco considerati della matematica: l'importanza dell'immaginazione e dei sensi, la matematica come scienza delle configurazioni, le manie e gli ideali di quegli esseri umani cui è capitato diventare grandi matematici.
Scopriremo anche che molte idee che si ritrovano nel mondo del supercalcolo sono strettamente correlate alle scoperte e osservazioni di Maria Montessori di tanti anni fa. Non solo, vedremo che anche in ambiti scolastici più tradizionali la matematica può essere affrontata in maniere più consone al funzionamento della nostra mente.
Certo, si sa che la matematica non è amata, ma quello che gli studenti odiano spesso non è la matematica, ma l'esperienza dell'insegnamento della matematica. E questa forse si può cambiare.

Hanno parlato dell'evento

Un articolo su Valle Sabbia News: «I numeri e le mani da sempre grandi amici».

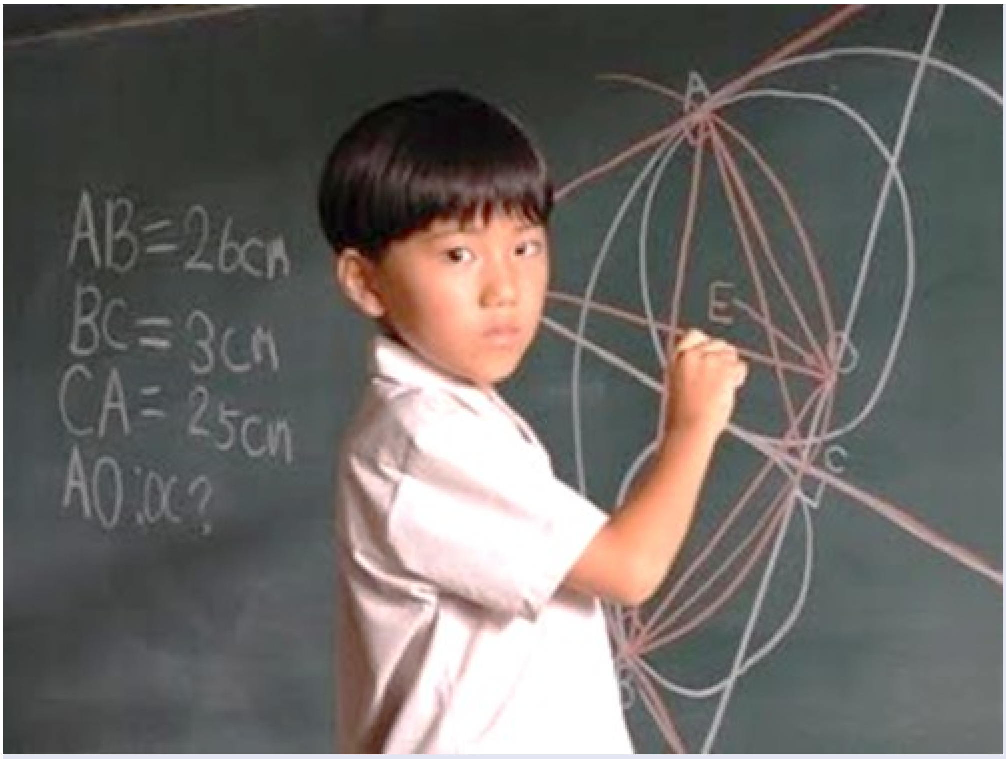
La presentazione

Buonasera! E grazie all’associazione “Il Sassolino” per questo secondo invito che ci permetterà di continuare la nostra chiacchierata alla scoperta delle idee di Maria Montessori.

Immagino che siate qui perché conoscete o avete almeno sentito parlare di Montessori e come nel suo metodo la matematica sia tenuta in alta considerazione…

…e magari siamo affascinati da quegli strumenti colorati che vediamo qui e ci chiediamo che cosa c'è dietro.
Oggi siamo qui per esplorare temi legati all'apprendimento della matematica da un particolare punto di vista:

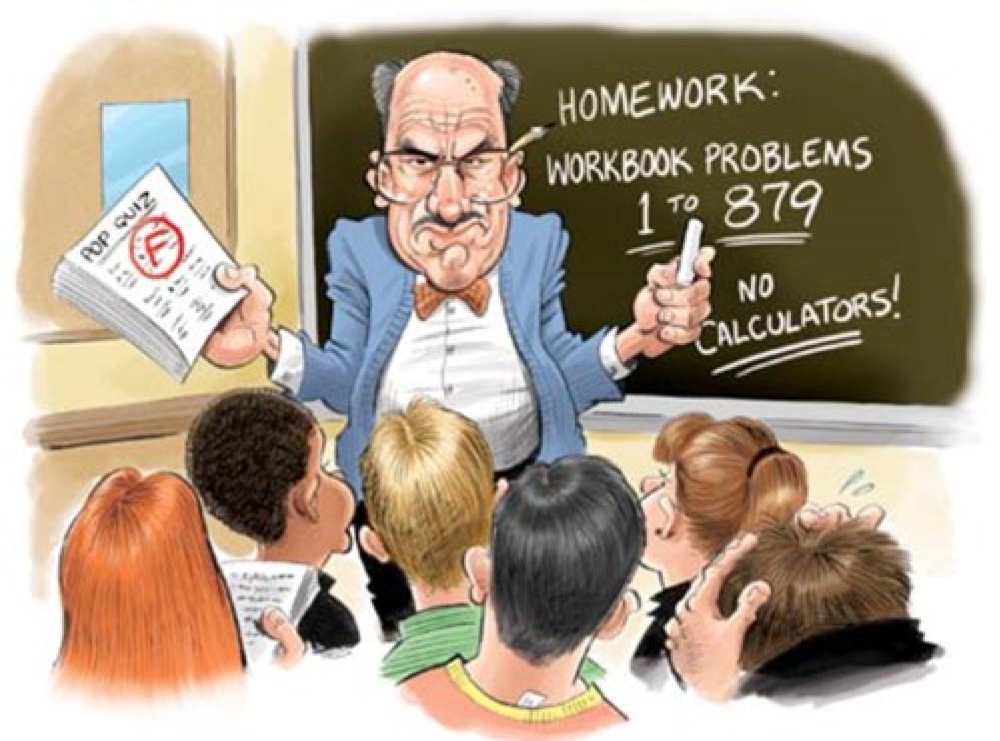
- Di persona che sta tra i numeri in un modo un po' differente
- Di papà che è venuto in contatto con un certo modo di fare e insegnare matematica
- Di marito di un'insegnante di matematica che ha voglia di sperimentare nuovi approcci

Non è mio obiettivo un'analisi pedagogica approfondita delle idee Montessori, c'è gente molto più qualificata di me qui a scuola.
Vorrei solo farvi conoscere qualche idea spesso trascurata riguardo a come funziona il nostro cervello rispetto ai numeri e come questi vengono usati in ambito scientifico.
E vorrei che alla fine di questa chiacchierata ve ne andaste con meno diffidenza per la matematica o per le cose «strane» che si fanno alla scuola Montessori.
In definitiva «un'altra matematica è possibile».

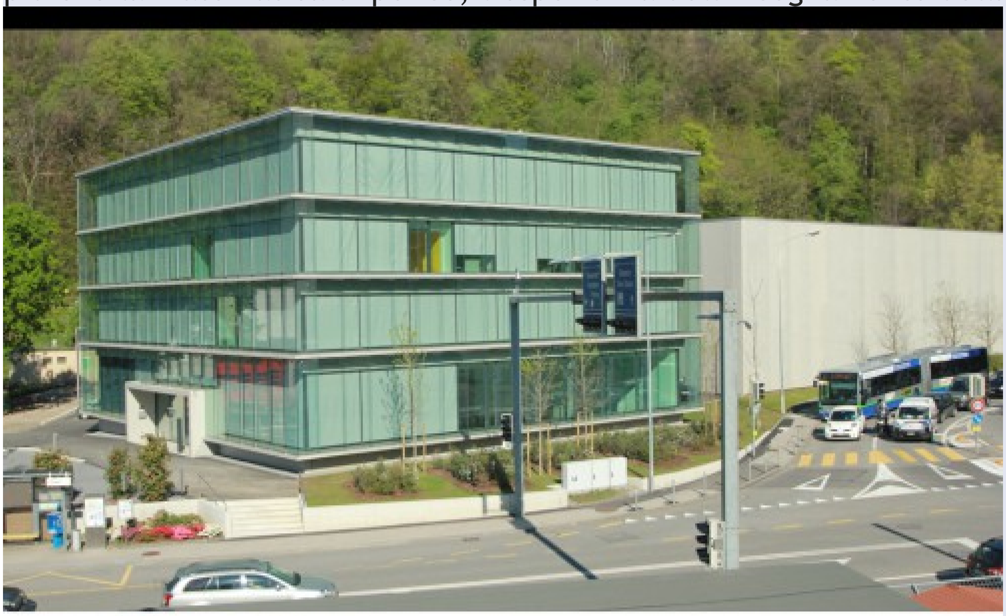


Con queste premesse non credo ci siano genitori incoscienti che vogliono forzare i figli a essere dei fenomeni della matematica o di qualsiasi altra disciplina, magari per esibirli davanti agli amici.

Certo, ci sono stati geni della matematica, come Gauss, che hanno fatto rizzare i capelli in testa a più di un’insegnante di matematica. Da loro possiamo imparare, non a diventare istantaneamente geni della matematica, ma possiamo imparare come ragionavano quando erano studenti delle elementari. Su questo ritorneremo più avanti.



Comunque sia, non credo di sbagliare di molto se penso che molti di noi siamo persone che hanno sofferto durante le lezioni di matematica a scuola e abbiamo finito per odiare più che la matematica di per se, l'esperienza dell'insegnamento della matematica.

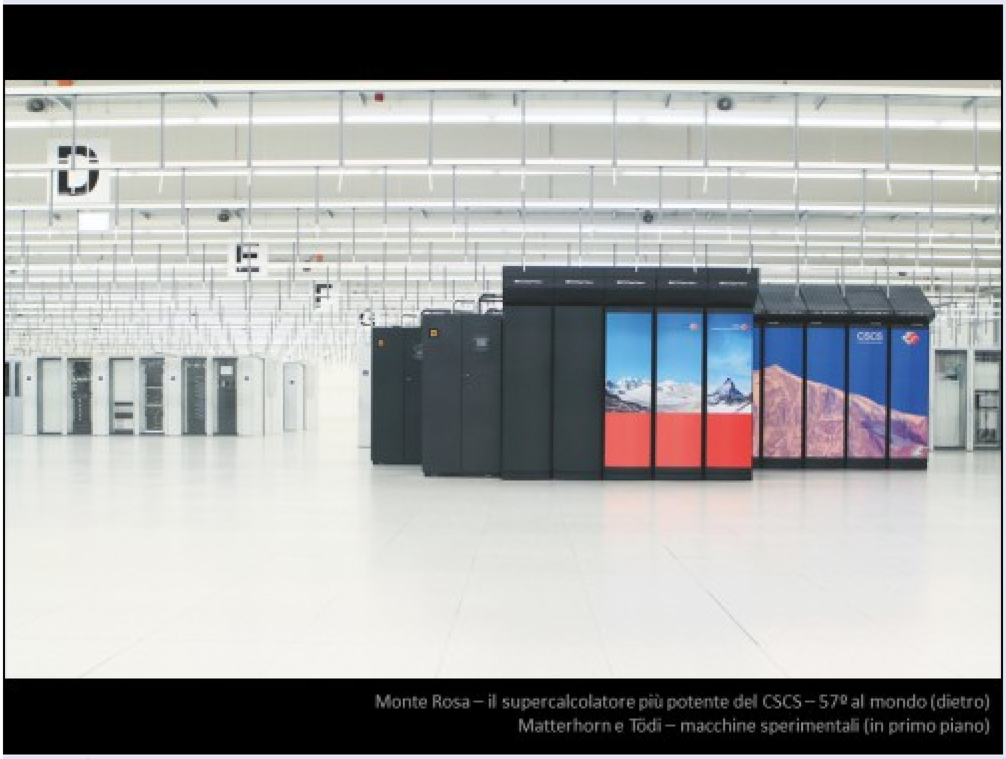


CSCS
Centro Svizzero di Calcolo Scientifico
Swiss National Supercomputing Centre

Per chi non mi conosce: mi chiamo Mario Valle, sono ingegnere elettronico e da dieci anni lavoro come "Visualization Scientist" al Centro Svizzero di Calcolo Scientifico (CSCS) e da diciotto sono in mezzo ai numeri e agli scienziati che li usano.


La nuova sala macchine del CSCS parzialmente popolata (giugno 2012)

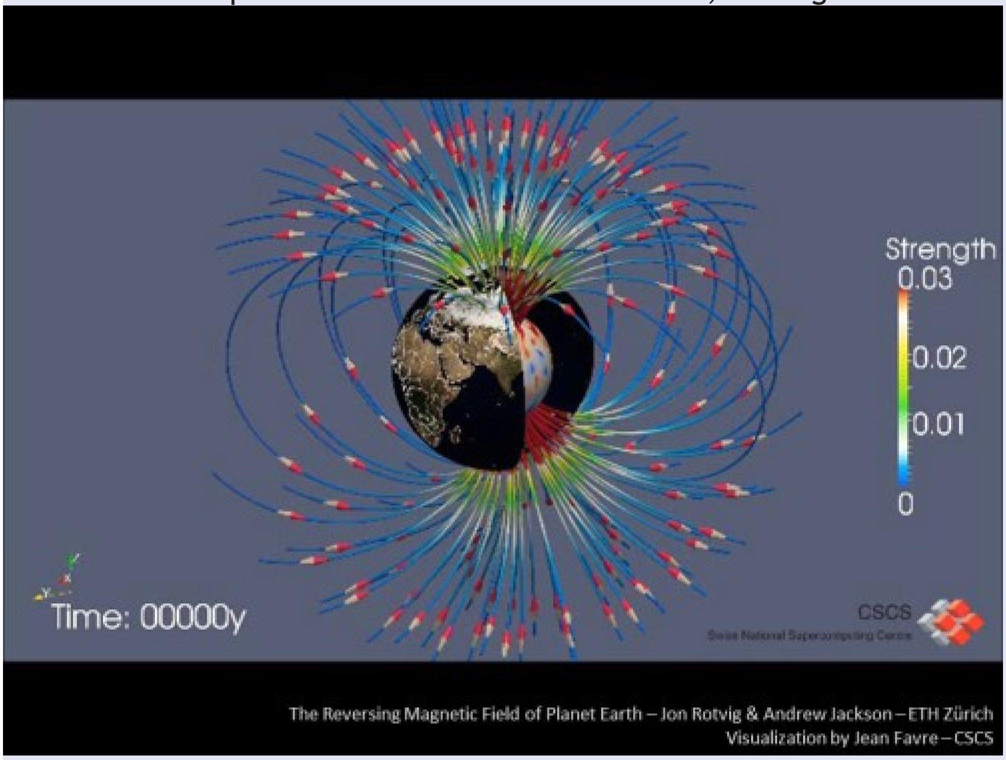
Al CSCS sono ospitati i più potenti calcolatori della Svizzera e fra quelli più potenti del mondo ci difendiamo bene.



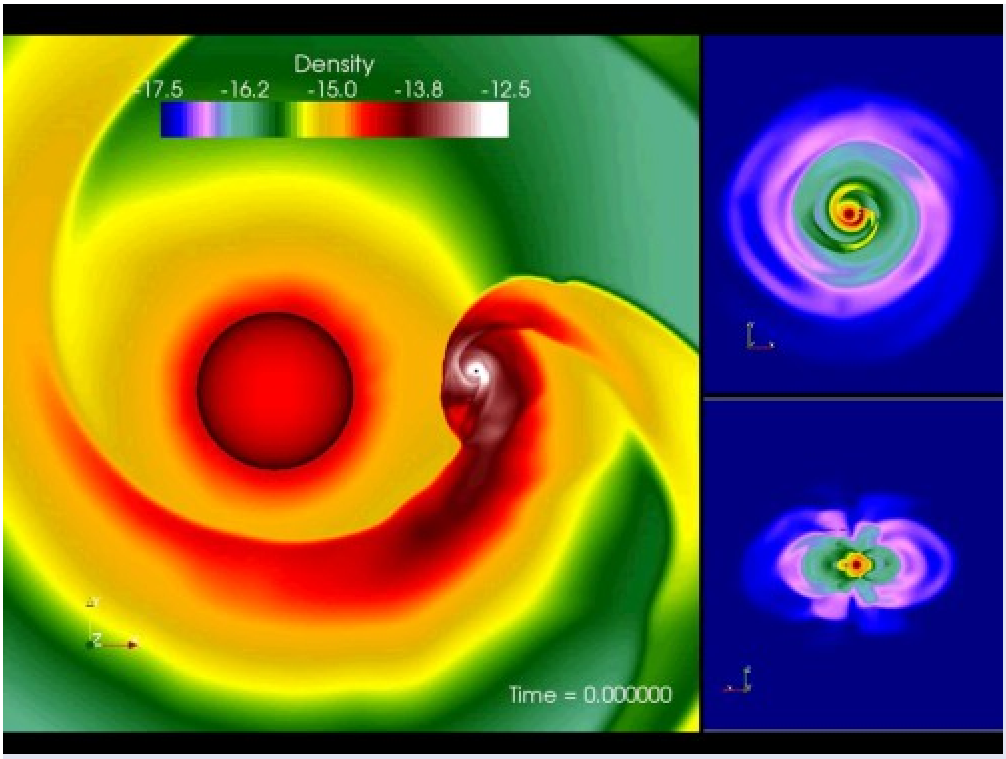
Monte Rosa – il supercalcolatore più potente del CSCS – 57º al mondo (dietro)
Matterhorn e Tödi – macchine sperimentali (in primo piano)

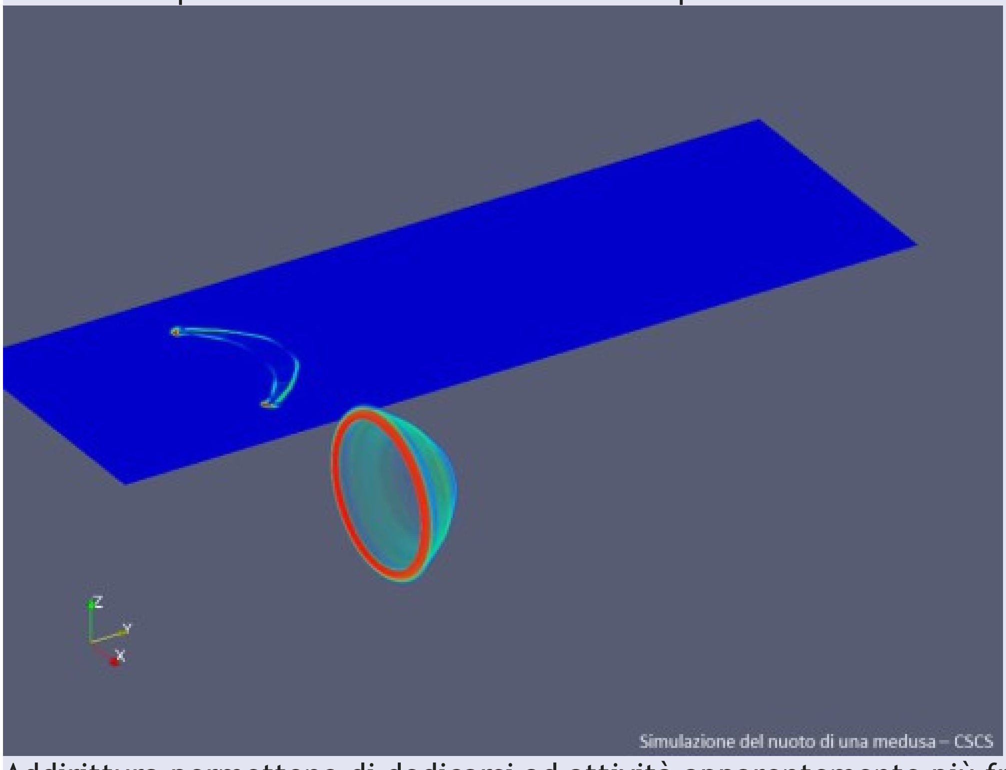
Tant'è che nella classifica Top500 (novembre 2012) dei calcolatori più potenti al mondo ci sono ben tre macchine del CSCS: Monte Rosa all'80º, Tödi al 91º e Piz Daint al 114º posto.

Calcolatori che producono numeri in abbondanza, sette giorni su sette per tutto l’anno.



Numeri che servono allo scienziato per capire come si comporterà il campo magnetico terrestre nei prossimi diecimila anni, se si invertirà e che conseguenze questo avrà sulla vita terrestre.



Numeri che permettono all'astrofisico di far esplodere le stelle senza provocare danni.


Addirittura permettono di dedicarsi ad attività apparentemente più frivole, come studiare il nuoto di una medusa.
In tutti i casi quello di cui mi occupo è rendere visibili i numeri prodotti in queste e altre simulazioni. Simulazioni che usano pesantemente la matematica e producono, appunto, tonnellate di numeri.
Ma quello che interessa allo scienziato è la comprensione di quello che accade, e io lo aiuto in questo compito con animazioni come queste che rendono visibile ciò che è nascosto dietro ai numeri.

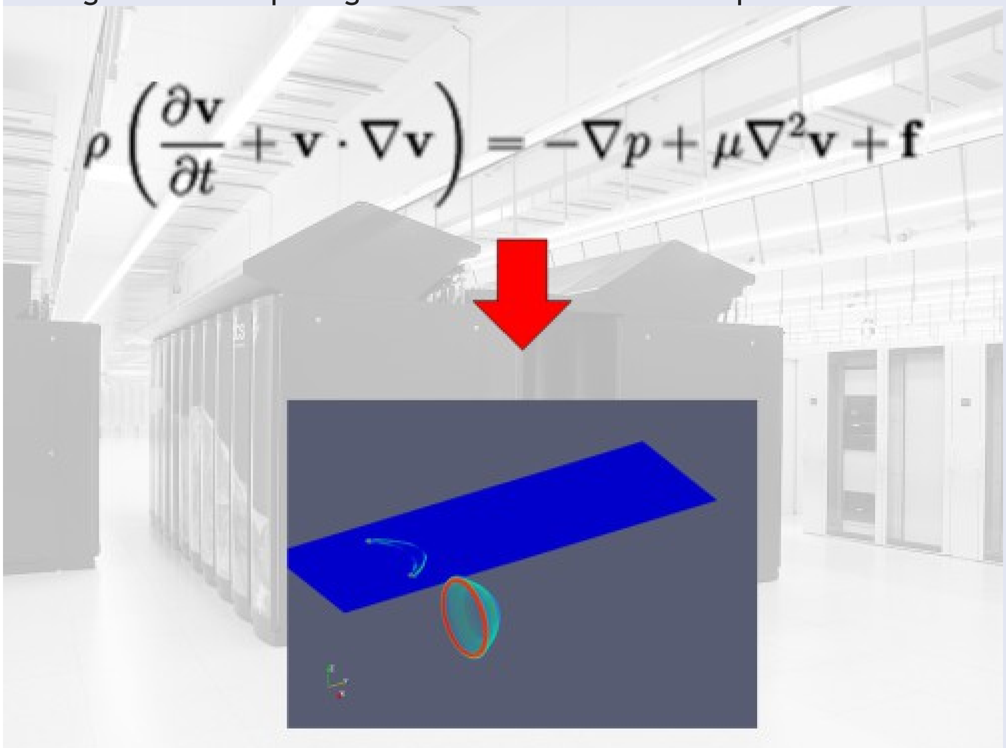
We use this bijection to compute the polynomial $f_{n,k}(q,z)$. We have

$$
\begin{aligned}
f_{n,k}(q,z) &= \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \epsilon^{\ell(\sigma)} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} z^{s(\sigma)} \\
&= \sum_{\substack{\sigma_0 \in S_{n-1,k}: \\ \sigma_0(n-1) \neq n-1}} \Big(\sum_{i=1}^{\sigma_0(n-1)} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-i} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)+n-1} z^{i-1} + \sum_{i=\sigma_0(n-1)+1}^{n-k} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-i} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)} z^{i-1} \Big) \\
&\quad + \sum_{\substack{\sigma_0 \in S_{n-1,k}: \\ \sigma_0(n-1) = n-1}} \sum_{i=1}^{n-k} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-i} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)+n-1} z^{i-1} + \sum_{\sigma_0 \in S_{n-1,k-1}} \epsilon^{\ell(\sigma_0)} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)} z^{n-k} \\
&= \sum_{\sigma_0 \in S_{n-1,k}} \Big(\sum_{j=0}^{s(\sigma_0)} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-j-1} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)+n-1} z^{j} + \sum_{j=s(\sigma_0)+1}^{n-k-1} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-j-1} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)} z^{j} \Big) \\
&\quad + z^{n-k} f_{n-1,k-1}(q,1) \\
&= \sum_{\sigma_0 \in S_{n-1,k}} \epsilon^{\ell(\sigma_0)+n-1} q^{\mathrm{maj}(\sigma_0)} \Big(q^{n-1} \sum_{j=0}^{s(\sigma_0)} (\epsilon z)^j + \sum_{j=s(\sigma_0)+1}^{n-k-1} (\epsilon z)^j \Big) + z^{n-k} f_{n-1,k-1}(q,1)
\end{aligned}
$$

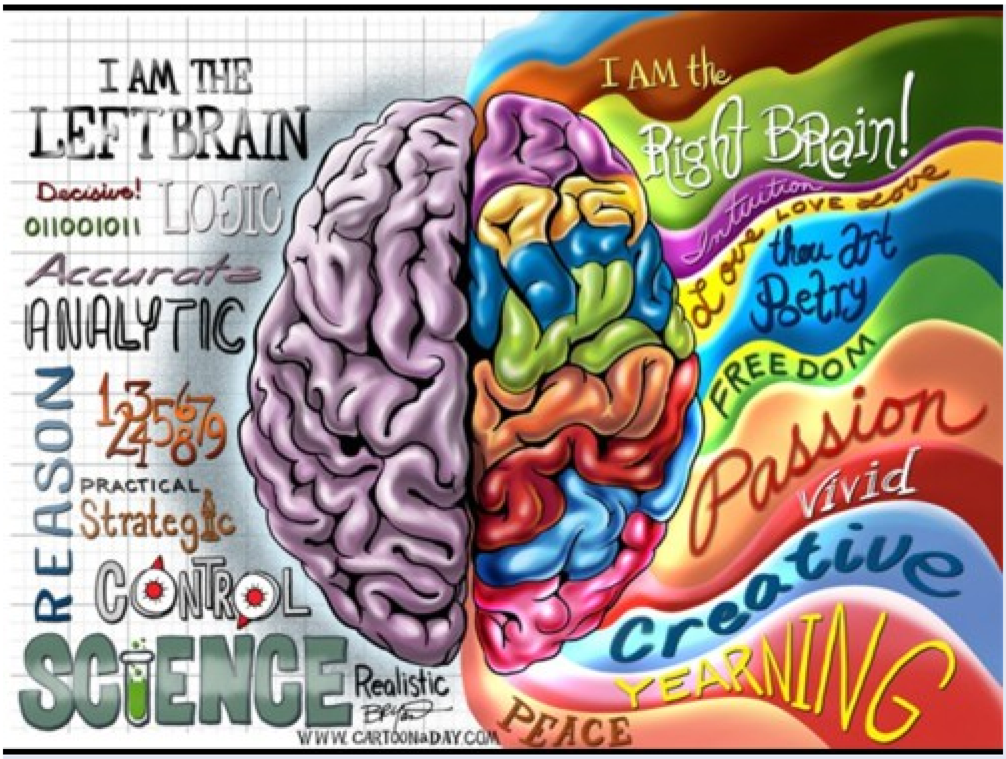
Computing the geometric sums in the right-hand side we obtain

$$
\begin{aligned}
& f_{n,k}(q,z) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n-1,k}} \epsilon^{\ell(\sigma)+n-1} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} \Big(q^{n-1} \frac{1-(\epsilon z)^{s(\sigma)+1}}{1-\epsilon z} + \frac{(\epsilon z)^{s(\sigma)+1} - (\epsilon z)^{n-k}}{1-\epsilon z} \Big) + z^{n-k} f_{n-1,k-1}(q,1)
\end{aligned}
$$

Come vedete è una matematica un po’ differente da quella che vediamo a scuola o che immaginiamo occupi le giornate dei matematici di professione.



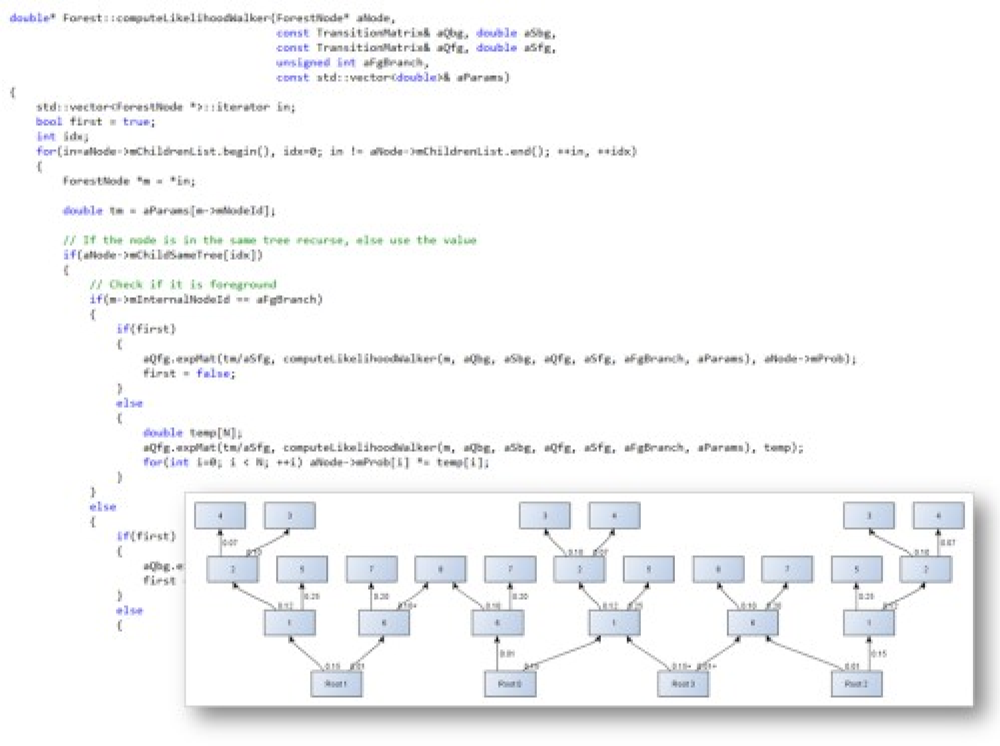
Quello che dobbiamo fare al CSCS è tradurre le formule matematiche in qualcosa che i calcolatori possano comprendere e possano utilizzare come base per le simulazioni.
E cosa serve per questo tipo di matematica?



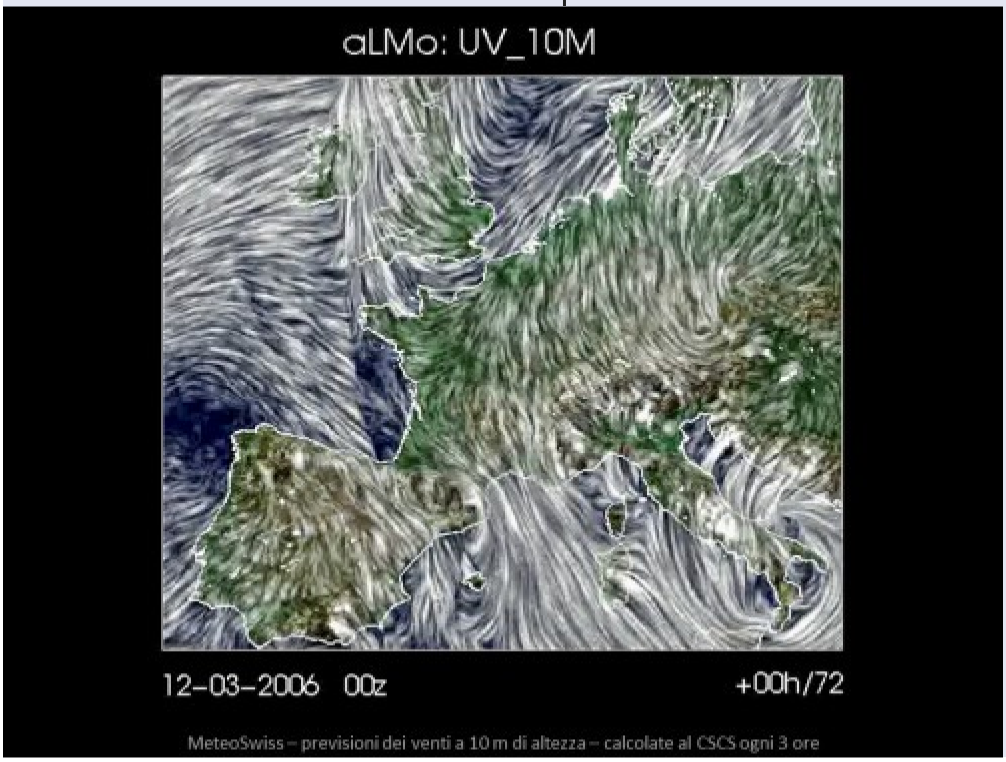
Udite, udite. Più che la parte razionale della nostra mente, tradizionalmente associata all’emisfero sinistro del nostro cervello, serve quella destra. Quella creativa, immaginifica e capace di ragionamenti spaziali.

Basta vedere come gesticoliamo per rendere visibile qualche concetto astratto.
Sono però in buona compagnia. Gesticolare è importante per la creatività e il pensiero, tanto che Vygotskij diceva che la scrittura non è altro che gesticolare solidificato.
Anche Maria Montessori diceva che bisogna «materializzare le astrazioni» che non sono inaccessibili al bambino, ma abbisognano di un ponte materiale. Se a bambino sostituiamo scienziato ecco che anche questo si può applicare al mio lavoro.

Il [laboratorio](#) della prof.ssa Susan Goldin-Meadow si concentra proprio sullo studio del gesticolare come aiuto al pensiero.



In questo lavoro di aiuto e supporto alla comprensione dei numeri in un ambiente in cui la matematica sbuca in ogni angolo in una forma che magari può far storcere il naso ai puristi, ho scoperto moltissimi paralleli fra quello che faccio e le proposte Montessori.
Lavorare con strutture e immagini nella mente è fondamentale per chi come me lavora con i computer. I numeri non sono quasi mai isolati, ma fanno parte di strutture (ma guarda!) che bisogna spesso immaginare, perché non ci stanno su un foglio di carta come queste rappresentate qui.
Viceversa per capire come funziona un pezzo di programma bisogna costruirsi nella mente la struttura dei suoi dati e manipolarla.



Queste visualizzazioni attivano il supercomputer che abbiamo dietro ai nostri occhi e quella parte del nostro cervello specializzata nel riconoscimento di forme e strutture.

Un supercalcolatore allenato e affinato da centinaia di migliaia di anni di evoluzione e di difficile sopravvivenza, in cui riconoscere se certe macchie sotto un albero appartenessero a un predatore era alquanto “interessante” per arrivare vivi a sera.

Oggi non dobbiamo più sfuggire agli animali feroci, ma le strutture presenti tutto attorno a noi non possiamo non vederle.

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Per capire quanto è importante questa nostra abilità ritorniamo a una matematica che tutti conosciamo: le tabelline.
Chi non ricorda la tavola pitagorica stampata alla fine dei venerabili Quaderni Pigna.
Tavola che finiva per essere l’unica distrazione durante le spiegazioni noiose.

Vengo invece qui e trovo una tavola di legno con dei chiodi e un filo di lana che si chiama la tavoletta o mandala delle tabelline.

La tabellina del due? Conto uno due e avvolgo il filo.

Uno due e avvolgo il filo.


Alla fine ho un pentagono. Possiamo dire che la tabellina del due è un pentagono.

Tabellina del tre? Uno due tre e avvolgo il filo.

Così via e mi ritrovo con una stella a dieci punte.

La tabellina del quattro? Stesso metodo.


E la stella ora è a cinque punte.

La tabellina del cinque è tutta sua, è una linea.

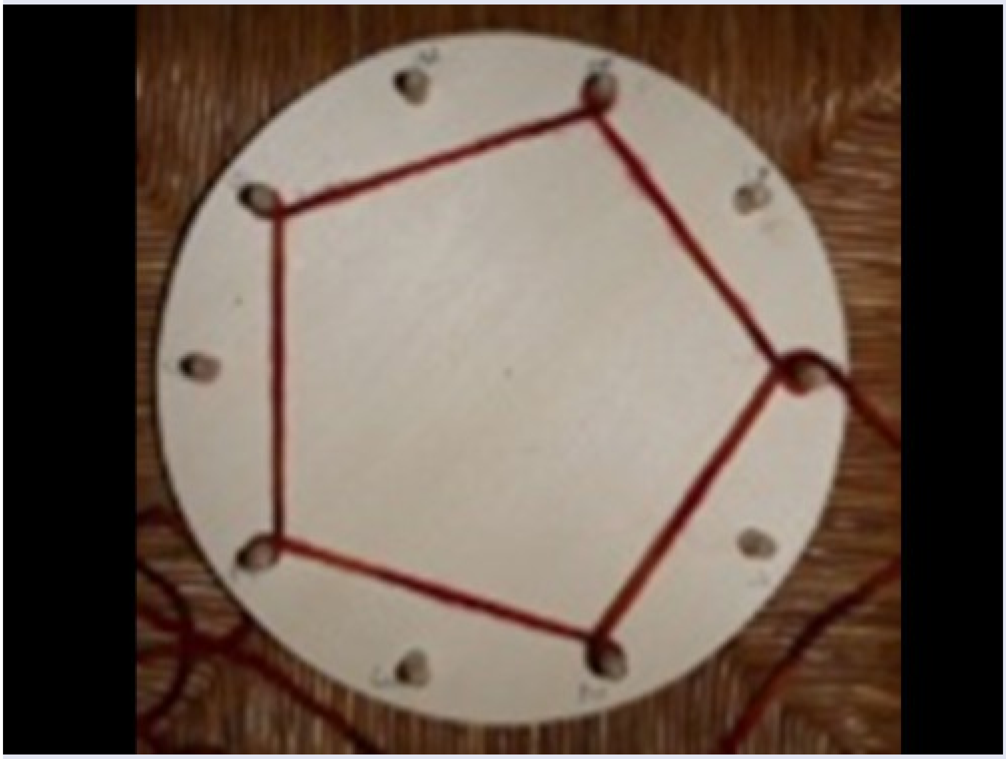
La tabellina del sei.

Guarda guarda, la stessa stella della tabellina del quattro. Ci sarà forse una connessione tra 4 e 6?

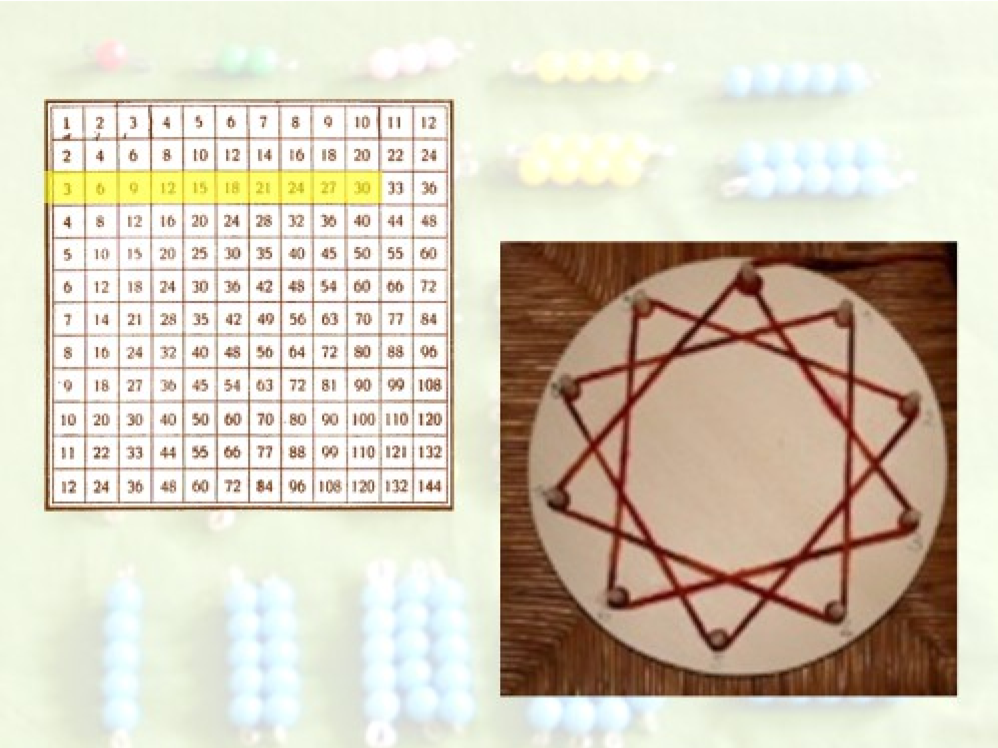
La tabellina del sette.

Come la stella della tabellina del tre. Allora c’è una connessione tra 7 e 3 come fra 6 e 4!

La tabellina dell’otto. A questo punto mi aspetto la stessa struttura della tabellina del due.



Infatti!



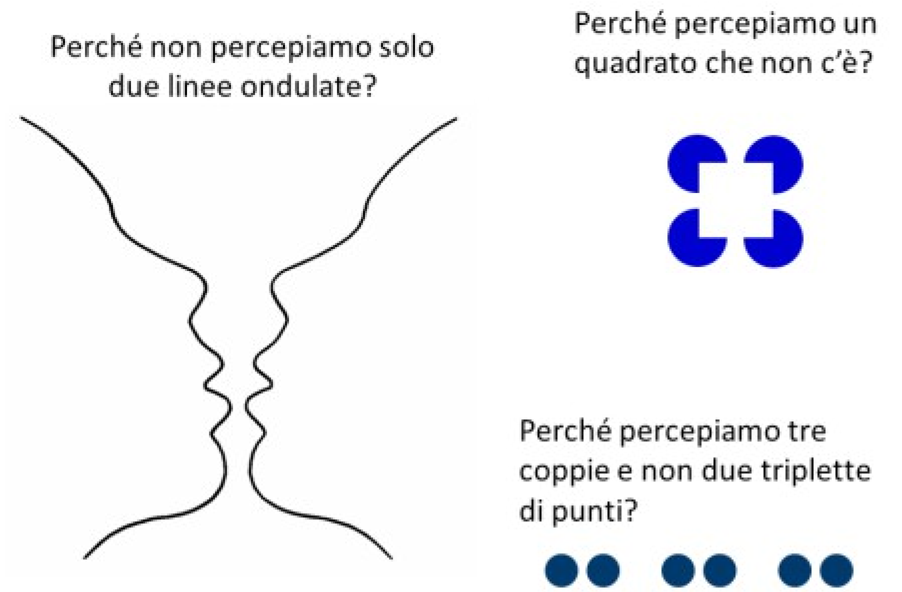
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

In cosa siamo incappati? Nella materializzazione di un concetto astratto come la tabellina. Non solo, abbiamo trasformato un lavoro puramente intellettuale di traduzione di simboli in significato in un lavoro di riconoscimento di forme e abbiamo ancorato dei numeri a un’immagine.

Se guardate quello che c’è in una scuola Montessori questo modo di operare lo trovate dappertutto. Nelle forme e nei colori. Per esempio il due è sempre verde. Un matematico potrebbe fare spallucce e dire che questo lo rappresento in maniera più compatta usando le notazioni matematiche. Concordo, ma vorrei sapere chi di primo acchito preferisce e ricorda la formula qui rappresentata.

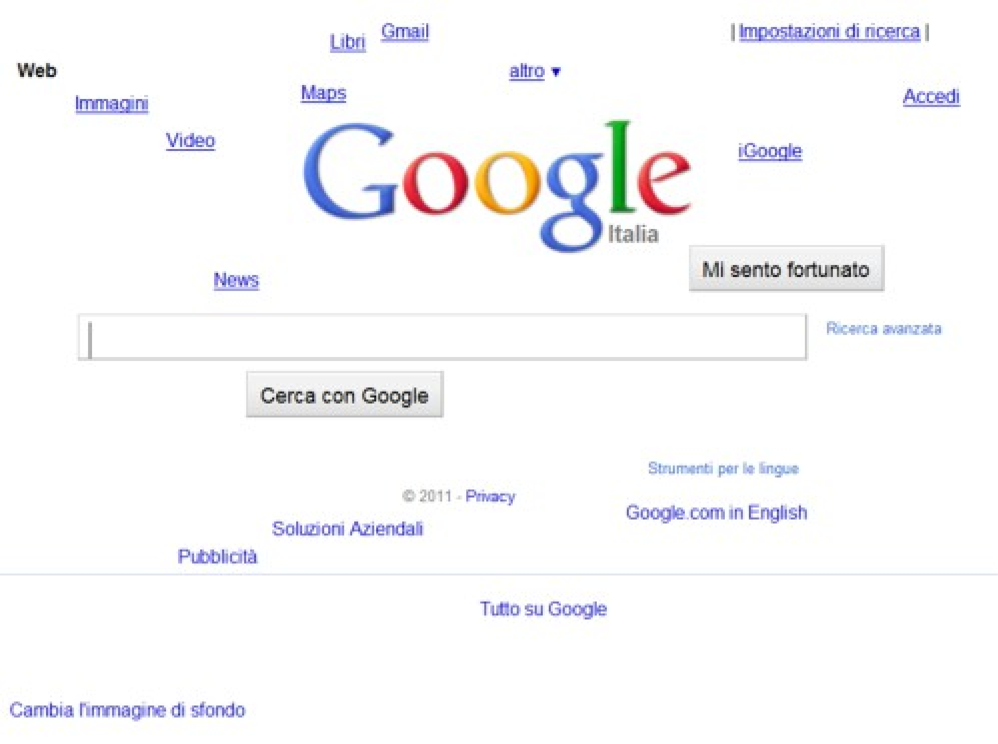
Anche in questo Maria Montessori ha precorso i tempi. C'è tutto un movimento in matematica che spinge ad aggiornare la definizione di matematica da «la scienza dello spazio e del numero» a considerarla «la scienza delle configurazioni».

Del resto il matematico G.H. Hardy diceva: «Un matematico, come un pittore o un poeta, è un creatore di schemi. Se i suoi schemi sono più permanenti dei loro, è perché sono fatti di idee.»
O Èvariste Galois che ha cambiato il volto dell'algebra concentrandosi non più su numeri o funzioni, bensì su strutture, in cui gli oggetti matematici non sono presi nella loro singolarità, bensì nel loro insieme e uniti da legami che strutturano questi insiemi.
Ancora una volta troviamo un legame fra matematica e visualizzazione e fra matematica e idee montessoriane. E questo legame deriva e si basa su come funziona il nostro sistema percettivo.



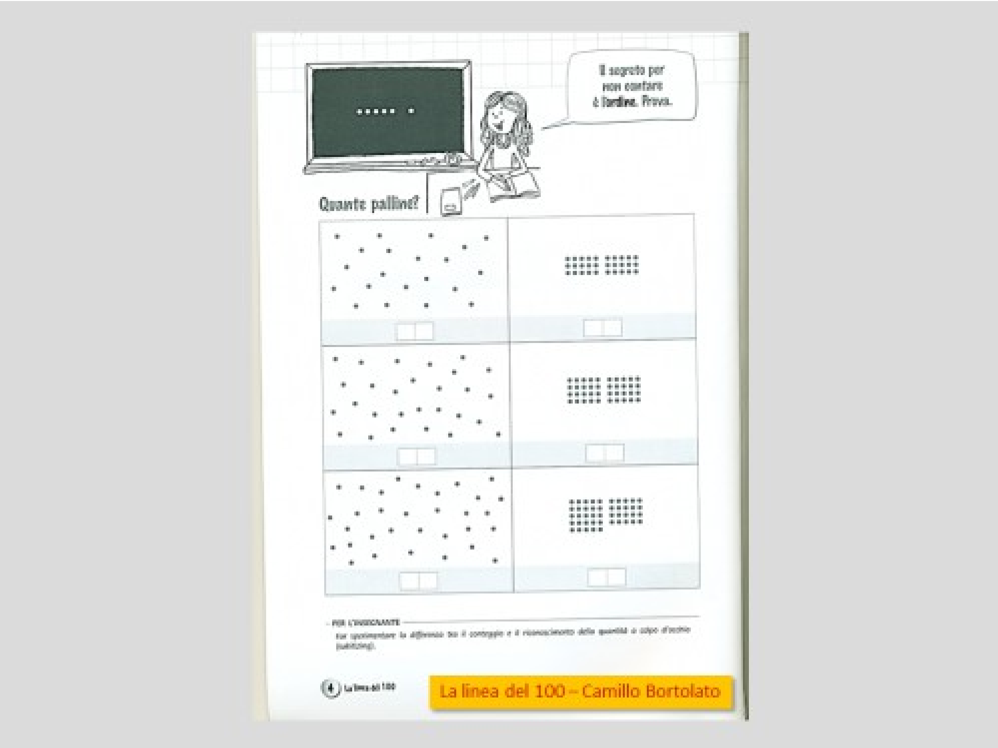
E questa nostra capacità è codificata nelle cosiddette leggi della *gestalt*.
In un qualche modo il nostro sistema visivo pre-processa la scena per semplificarci l'interpretazione, anche se ha volte ci fa vedere ciò che non c'è.
Per esempio non riusciamo a non vedere un quadrato o a vedere due triplette di punti.

E il nostro cervello si mette subito in allarme quando vede delle figure impossibili, come questa.



Queste capacità ci aiutano nella vita di tutti i giorni. Se, per esempio, la pagina di Google fosse fatta così sarebbe molto più difficile da usare.

Mentre così l'occhio è guidato dagli allineamenti e dai raggruppamenti a trovare facilmente ciò che cerca.
Ancora una volta, abbiamo queste capacità, perché non usarle?



Mi è capitato fra le mani un libro che usa mia moglie in cui questi concetti sono resi in modo chiaro e visibile.
[Camillo Bortolato](#) ha inventato un metodo di approccio alla matematica chiamato: «Metodo Analogico» che, pur non essendo assolutamente legato a Montessori, pure ne condivide alcuni principi. Per questo ne parlerò qui.

Ancora, il materiale Montessori delle «marchette» rende visibile il concetto di pari/dispari semplicemente da una configurazione dei gettoni sul tavolo.

Nella scuola di Oggiona, vicino a Varese, si mettono a fare questi giochetti. Ma andiamo oltre la prima impressione.
Qui non abbiamo solo materializzato la linea dei numeri, questi bambini la creano con tutto il loro corpo, non solo con la mente.
Non solo, ci sono studi che hanno provato che il bambino sin da piccolo si costruisce nella mente — immagina — la linea dei numeri, solo che all'inizio la linea non è uniforme, i numeri piccoli sono affastellati e quelli grandi sono via via più radi. Man mano che cresce, però, questa linea diviene sempre più uniforme e cresce pari passo la sua capacità di trattare numeri sempre più grandi.
Ma per costruirsi un'immagine mentale della linea dei numeri serve vederla! Noi costruiamo immagini mentali, immaginiamo solo ciò che ci entra attraverso gli occhi.

Ed ecco perché qui alla scuola Montessori troviamo il serpente del mille e bambini che mettono freccette con i valori. Non troviamo bambini urlanti entusiasmo, ma troviamo lo stesso principio al lavoro: i bambini usano l'intero corpo, non solo la testa.
Stessa idea, differenti etichette pedagogiche.

Quando qui vedete un bambino lavorare con i fuselli, annodandoli assieme, non solo sta acquisendo il concetto di numero come composto da unità legate assieme, ma il movimento delle mani, il dover fare il nodo aiuta ad acquisire questo concetto con tutto il corpo.
Oltre ad imparare a fare i nodi, che non guasta.

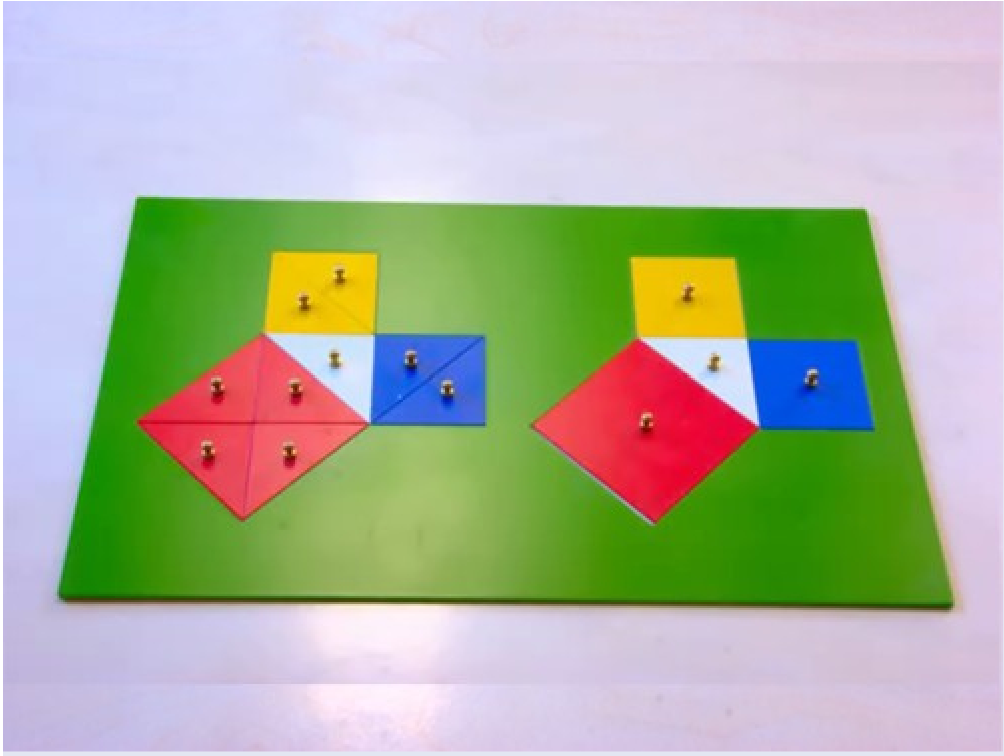
Oppure le aste numeriche, che i bambini imparano a prendere dalle estremità, danno loro il senso di quanto è lungo un metro o venti centimetri.

A proposito, c’è chi dice che le maestre Montessori sono troppo rigide nell’esigere che i materiali siano utilizzati in una specifica maniera. Ma proprio questo mette in luce come siano scientifiche le basi su cui si fondano questi materiali. Ecco, se fosse permesso prendere le aste numeriche al centro con una mano che cosa trasmetterebbero? Il peso. E il bambino assocerebbe il numero al peso invece che alla lunghezza.

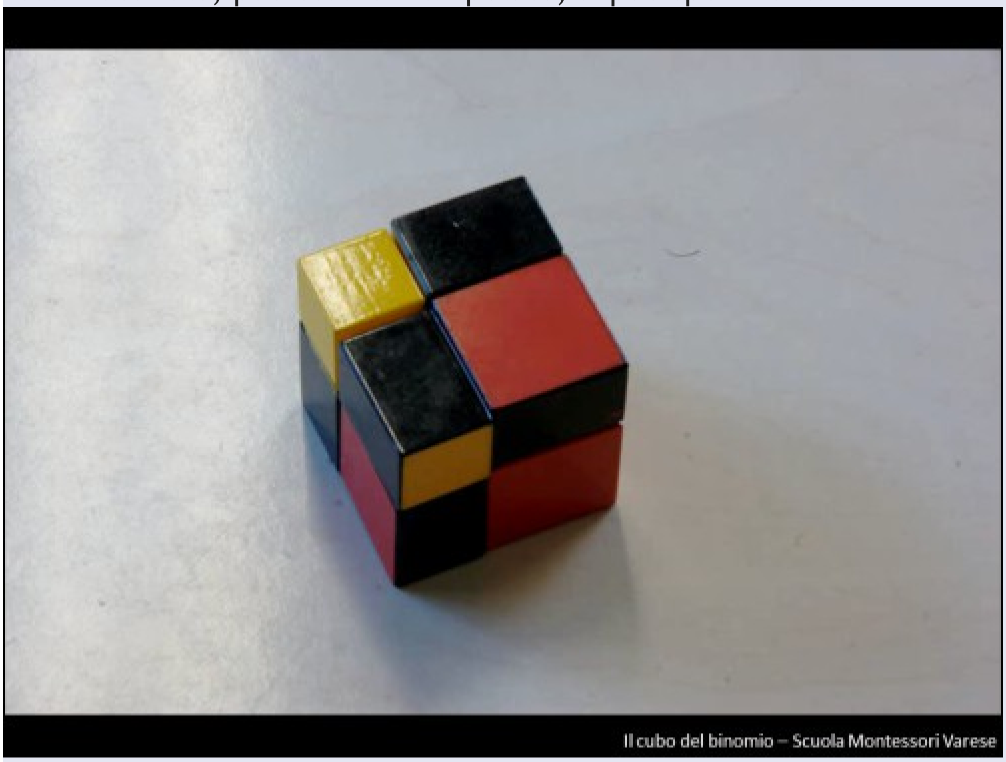
La linea del 20 – Camillo Bortolato

E qui? L’idea è la stessa. Nel metodo Bortolato i bambini usano un aggeggino *isomorfo* alle dieci dita per imparare a fare i conti.

Se guardate con attenzione il filmato, vedrete varie cose interessanti. La bambina in verde che aggiunge le dita. Il click-clack che da soddisfazione e la bambina con le codine che nemmeno apre lo strumento, ma lo guarda. Probabilmente il click-clack lo fa nella testa e usa lo strumento come aiuto per il modello mentale che ha acquisito.

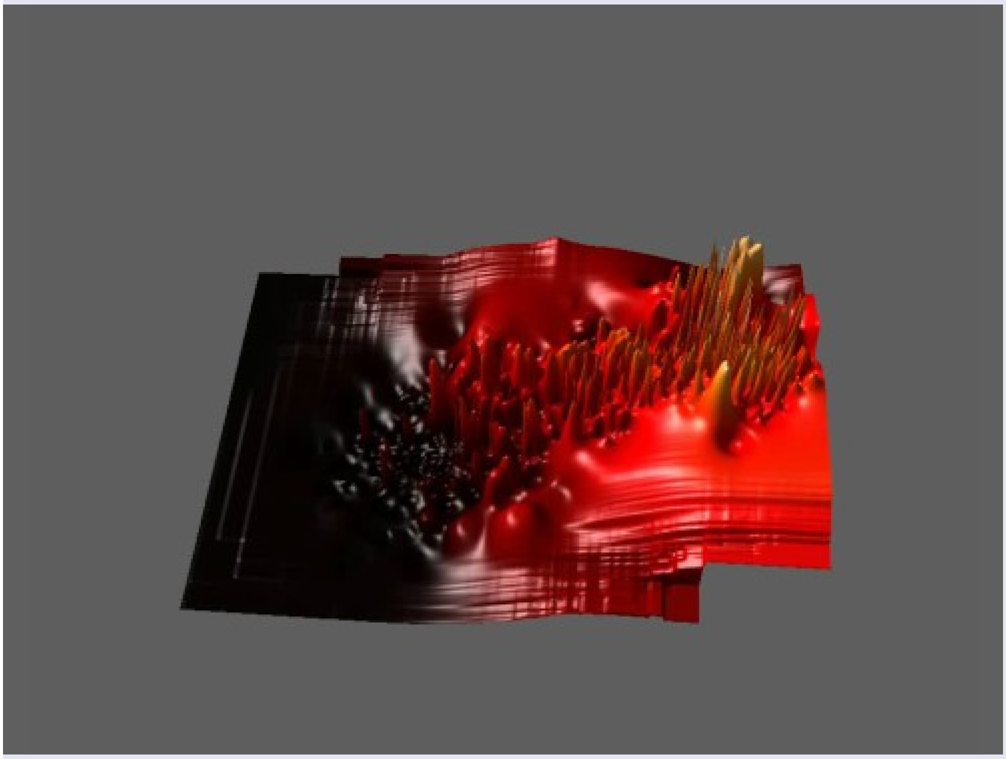


Avanzando nella scala dell’astrazione anche un teorema, quello di Pitagora, può essere reso materiale, può essere manipolato, si può sperimentare.

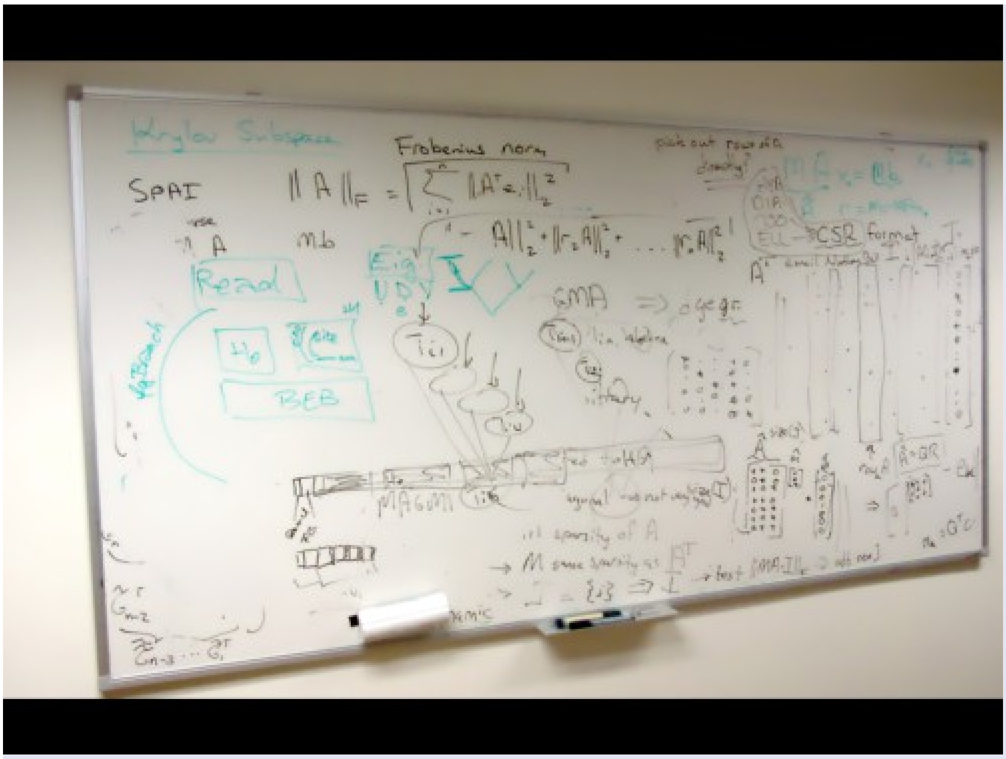


Pensando all’influenza del corpo e del movimento delle mani qui abbiamo un doppio vantaggio: vedo la formula matematica e uso il movimento per smontare e rimontare la formula. Alla fine certo che me la ricorderò!
L’uso delle mani comporta l’utilizzo della zona motoria, rimasta inutilizzata nell’apprendimento solo teorico della matematica, ma anche di altre discipline. Se prendo appunti la utilizzo, in più, rileggendoli a voce alta, coinvolgo anche l’udito nell'apprendimento (grazie del suggerimento Carla Corradi!).

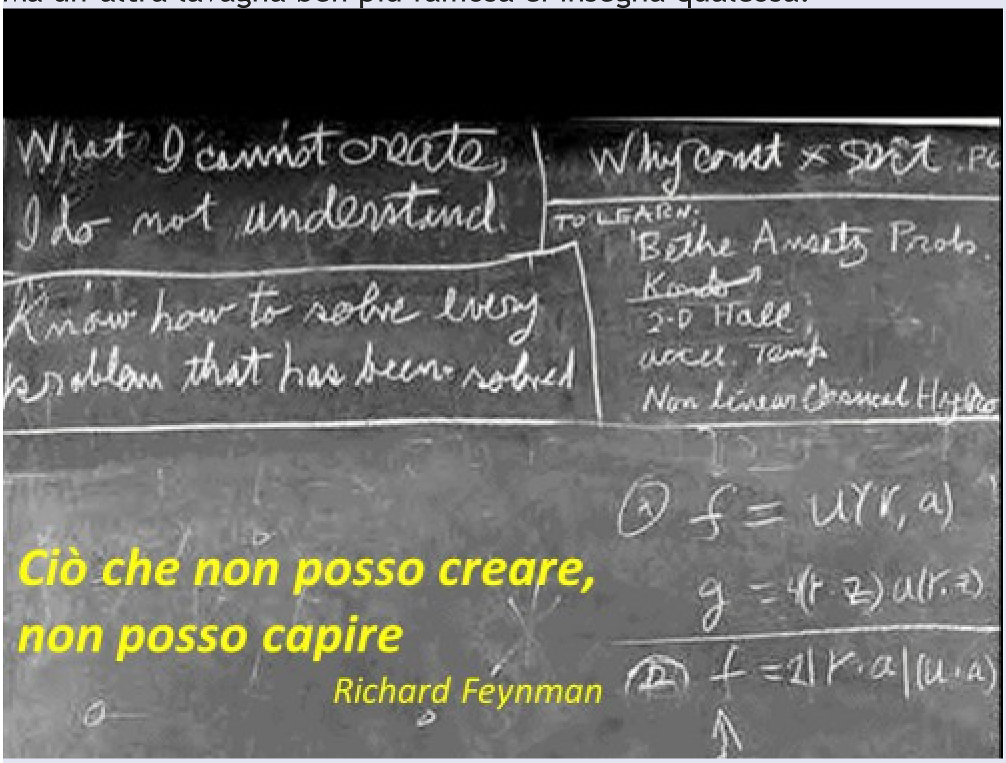
Ed ecco che si capisce questa frase di Maria Montessori.
Tanto che una teoria della psicologia cognitiva, chiamata «embodied cognition» ovvero cognizione incarnata, riflette la tesi secondo cui il sistema motorio influenza la nostra cognizione, proprio come la mente influenza le azioni del corpo. Ancora una volta lei c'era arrivata cento anni fa.



Io invece sono limitato dall'interfaccia con il computer. Posso solo muovere una superficie matematica, girarci attorno, ruotarla fino a quando non riesco a costruire nella mia testa un modello mentale di ciò che la superficie rappresenta.
Giusto per incuriosirvi, ho fatto un salto sulla sedia quando ho visto questa superficie, che è il risultato di un metodo inventato da me. Mostra una caratteristica delle nanoparticelle d'oro non visibile con altri metodi.



Non solo, al CSCS potete vedere tanti seri scienziati che discutono, scarabocchiano lavagne e gesticolano per materializzare idee matematiche e astratte che hanno in testa.
Gesticolare è importante per la creatività e il pensiero, tanto che Vygotskij diceva che la scrittura non è altro che gesticolare solidificato.
Ma un’altra lavagna ben più famosa ci insegna qualcosa.

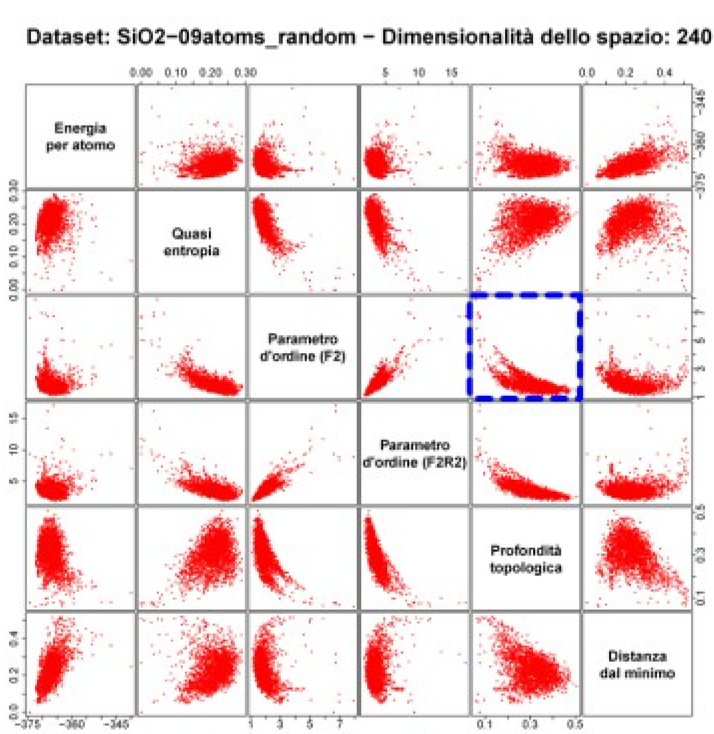


Questa è la lavagna come l’ha lasciata il premio Nobel Richard Feynman quando è morto. «Ciò che non posso creare, non posso capire» ha lasciato scritto. Bella lezione.
Lezione che mettono in pratica ogni giorno qui decine di bambini.
Anche uno che scrive «cose da studiare» sapendo di stare per morire ci da una lezione potente.

Qui al nido possiamo trovare bambini che giocano col cestino dei tesori di Elinor Goldschmied. Certo non fanno matematica. Svuotano prendono combinano cercano. Non si stancano mai. Ma nel loro lavorare ci danno svariati insegnamenti:

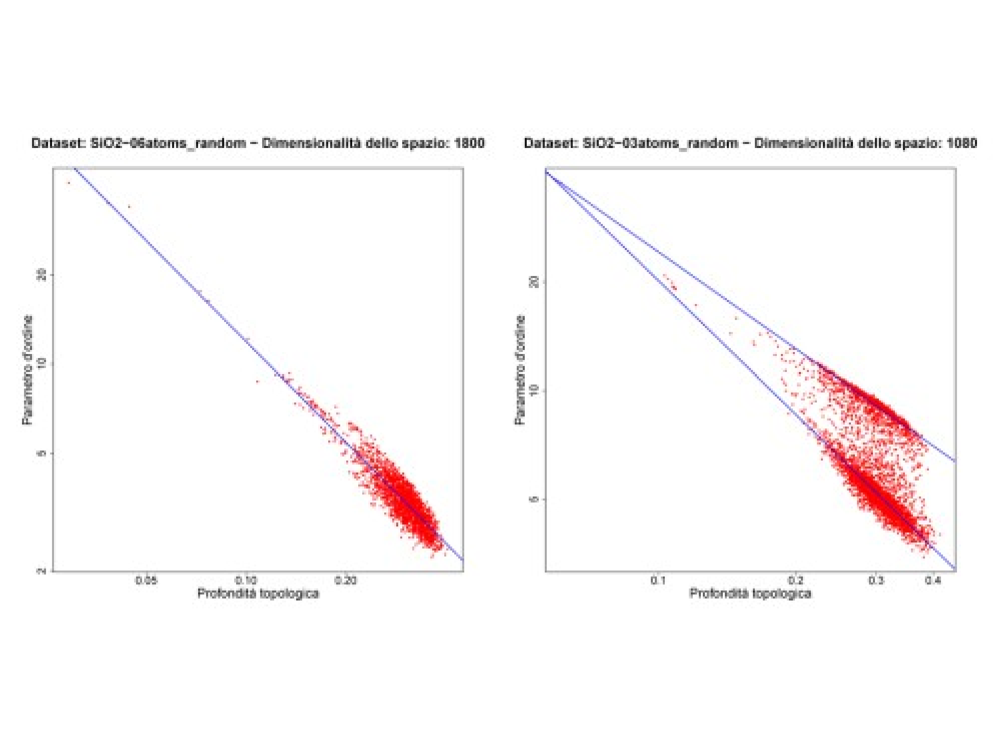
- Giocare è una cosa seria
- Giocare vuol dire poter sbagliare e poter non sapere.
- Nel gioco non vale l’equazione errore = brutto voto

Ma la cosa che mi ha colpito è che prima di tutto esplorano, senza un’idea preconcetta di quello che troveranno.



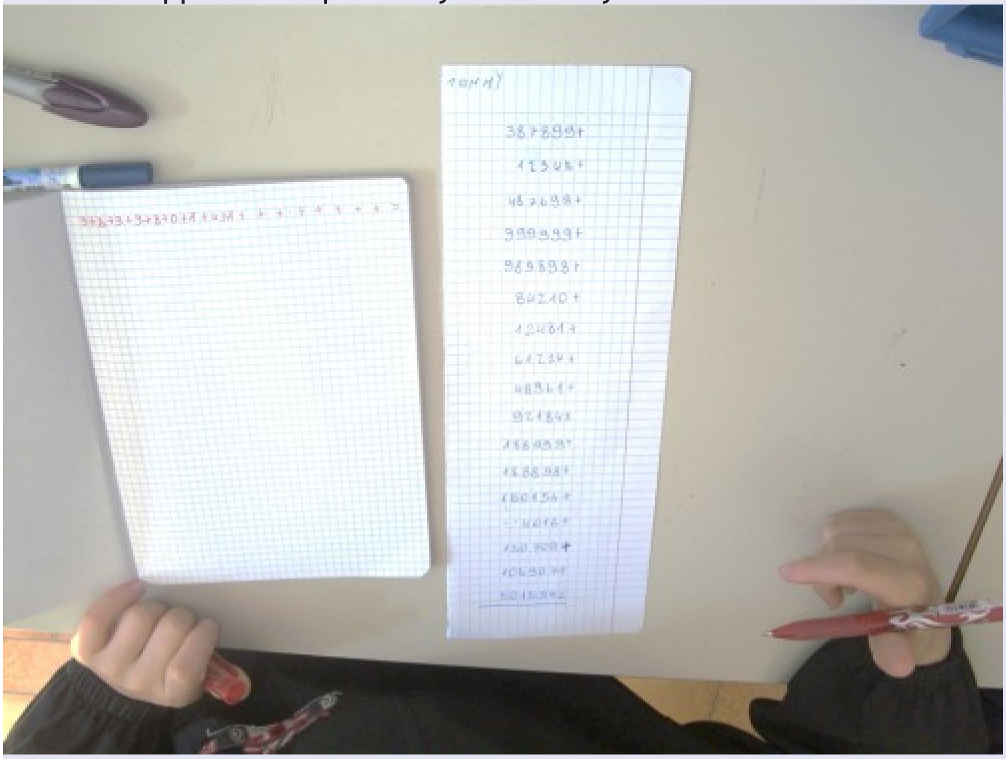
Ed è quello che devo fare molto spesso. Non so che cosa troverò. Combino tutti i numeri che ho generato sperando che qualche combinazione mi faccia drizzare le orecchie.

Per esempio qui ho sei variabili per ognuno di diecimila cristalli. Li provo a combinare due a due e una combinazione attira la mia attenzione.

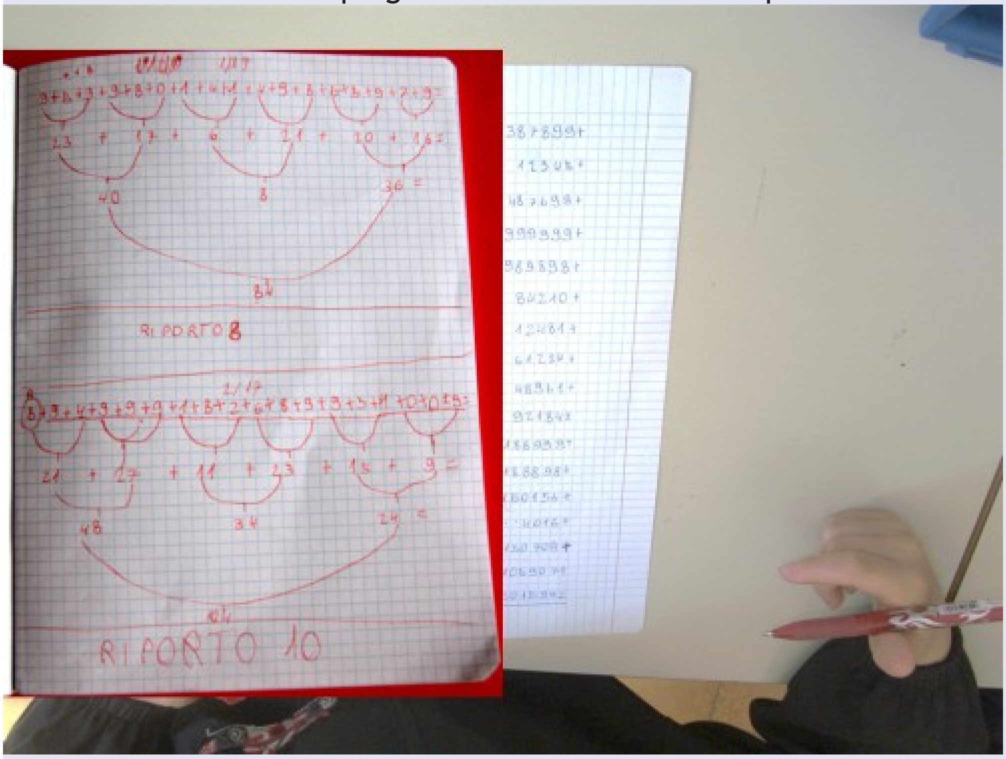


Per questo la rappresento in modo differente, ed ecco che le variabili mostrano una relazione piuttosto interessante.
Ancora una volta un matematico storcerebbe il naso. I punti non sono precisamente su una retta. Ma per me sono sufficientemente allineati da suggerire che ci sia una qualche relazione nascosta.
Questo ci porta a un’altra considerazione: quanti studenti sanno ragionare in maniera approssimata, cioè sanno il significato dei numeri? Quanto pesa una valigia? Quanti secondi ci sono in un anno (31.557.600)?
Si può dire tanto sull’assurdità delle prove INVALSI, ma ogni tanto hanno delle domande interessanti, peccato che i programmi ministeriali vadano per un’altra strada.

Esplorare è fondamentale nel mio lavoro e nella scienza in generale. Esplorare è il modo per catturare l'essenza di un problema.
Il grande statistico [John Tukey]() (che tra l'altro ha inventato tanti termini di uso comune come *bit* e *software*) ha addirittura inventato una nuova branca della statistica chiamata appunto «Exploratory Data Analysis».

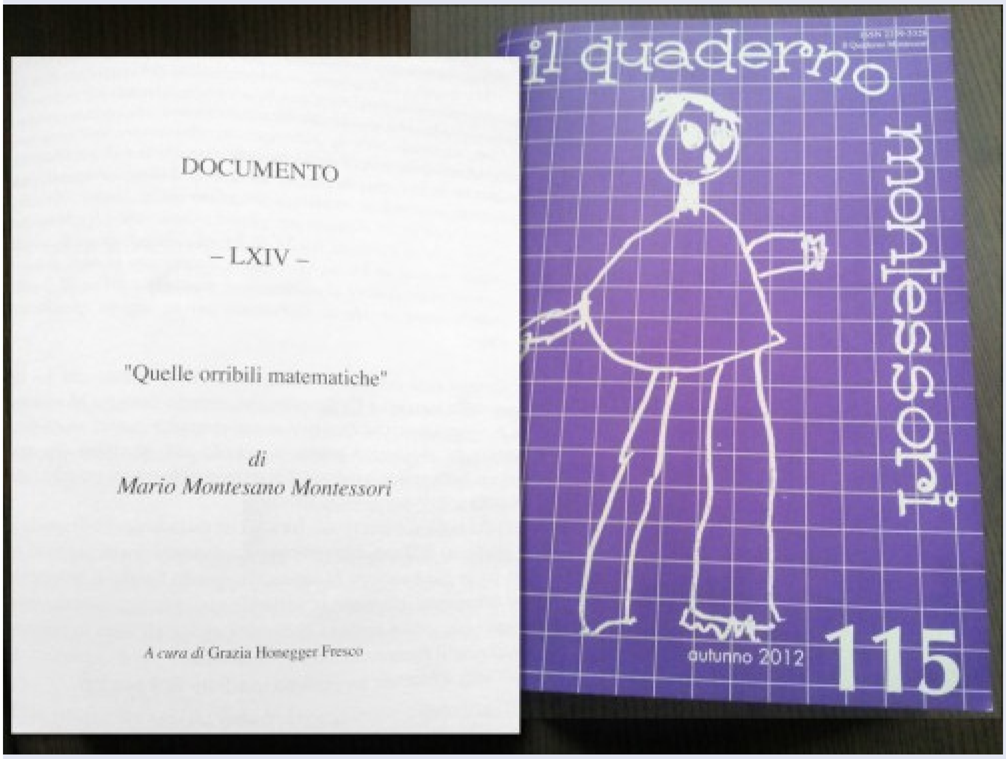


Se la matematica diventa così, un gioco, allora anche inventarsi queste lenzuolate di somme è divertente e spinge a trovare soluzioni non previste.

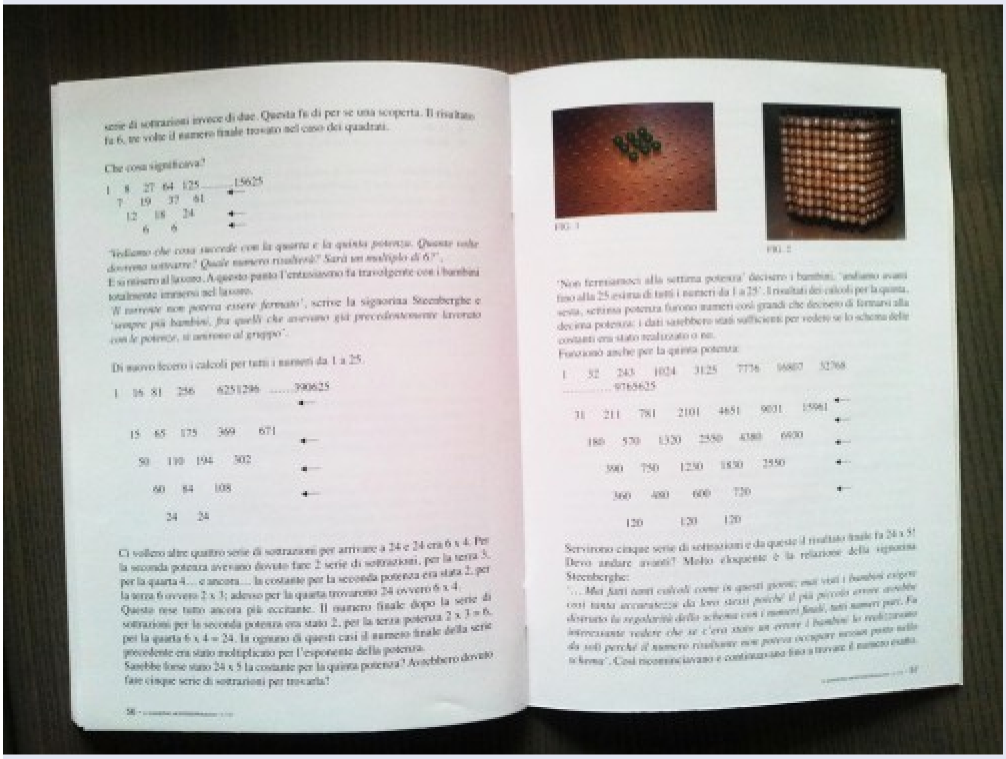


Vedete il quadernino? Questo bambino, un beneficiario della sperimentazione alla scuola di Oggiona, si è inventato un meccanismo per non perdere il filo durante somme così lunghe.

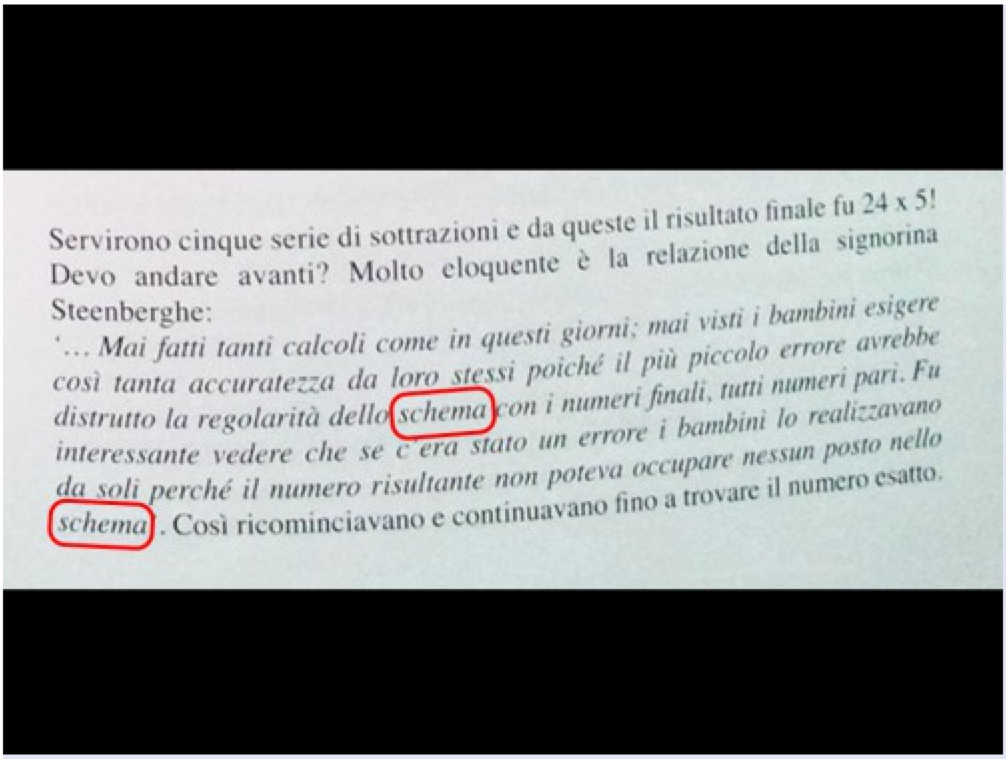
Potremmo liquidare il tutto con un “è portato”. Ma così evitiamo il problema. Come abbiamo preparato la sua mente? Come abbiamo fatto si che potesse scegliere che cosa lo interessa?



Nell’ultimo numero del Quaderno Montessori c’è un documento nientemeno che di Mario Montessori intitolato “Quelle orribili matematiche”. Riporta un fatto avvenuto in una scuola Montessori olandese.



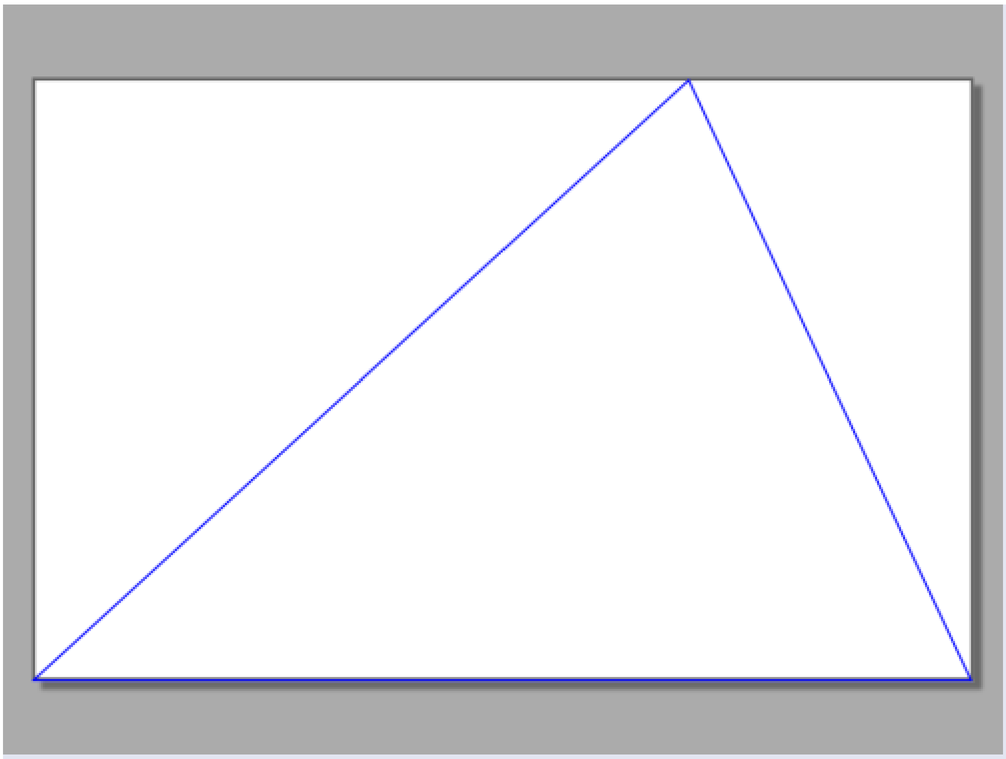
I bambini si erano accorti che la differenza fra due quadrati consecutivi era sempre un numero dispari e che quindi la differenza fra le differenze era sempre due.
E cosa succede alle differenze tra cubi? Se lo sono domandato e via a calcolare potenze e sottrazioni! E un altro schema è emerso. E allora le quarte potenze? Altra regolarità nascosta!



Servirono cinque serie di sottrazioni e da queste il risultato finale fu 24 x 5! Devo andare avanti? Molto eloquente è la relazione della signorina Steenberghe:
'... Mai fatti tanti calcoli come in questi giorni; mai visti i bambini esigere così tanta accuratezza da loro stessi poiché il più piccolo errore avrebbe distrutto la regolarità dello schema con i numeri finali, tutti numeri pari. Fu interessante vedere che se c'era stato un errore i bambini lo realizzavano da soli perché il numero risultante non poteva occupare nessun posto nello schema. Così ricominciavano e continuavano fino a trovare il numero esatto.

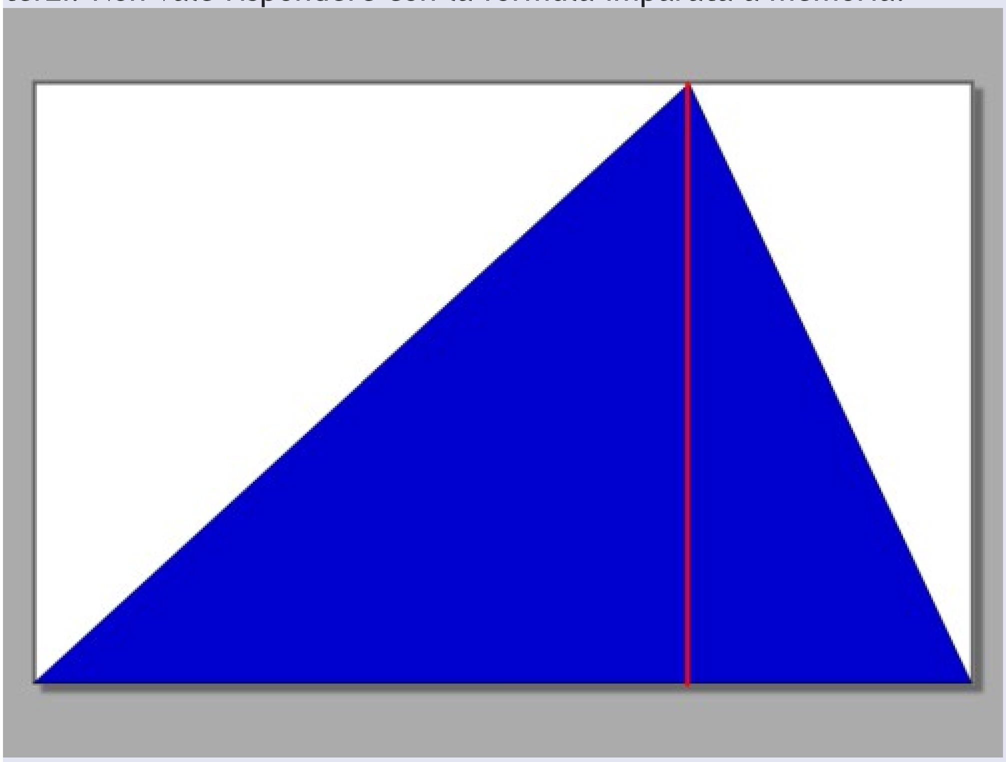
La relazione conclude mostrando come queste operazioni hanno insita l'autocorrezione come un qualsiasi materiale Montessori. Ogni piccolo errore avrebbe distrutto lo schema.
Ecco qui un'altra volta la matematica come scienza delle configurazioni e degli schemi.

Esplorare, giocare. Ci sono tantissimi giochi matematici, ma quando guardo ai giochi didattici su computer mi cadono le braccia.
Mi sembrano le stesse identiche cose di una lezione frontale, solo con una spruzzata di mostriciattoli o di faccine buffe in più.

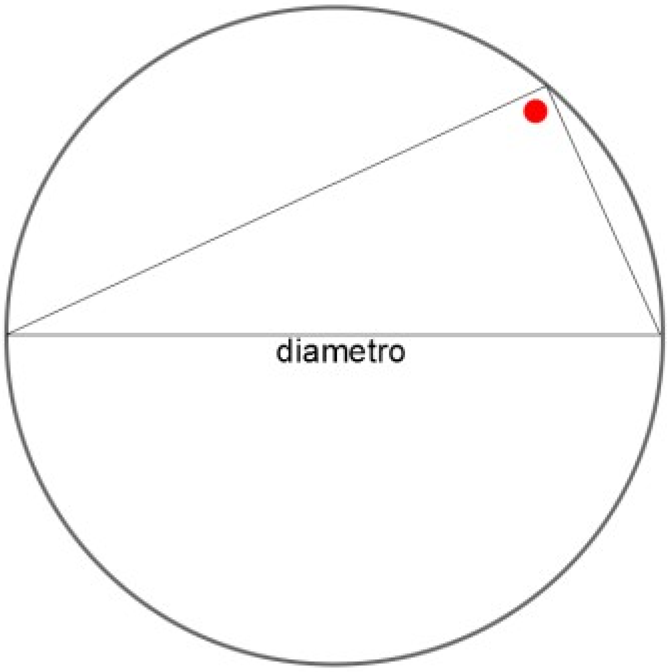


Cito dal libro “Contro l’ora di matematica” di Paul Lockhart (Rizzoli 2010). Date ai ragazzi problemi veri! I ragazzi devono avere un ruolo attivo, devono “fare matematica” al loro livello. Non devono soltanto accostarsi a un corpo di conoscenze già predisposto. Devono essere loro a costruirselo.

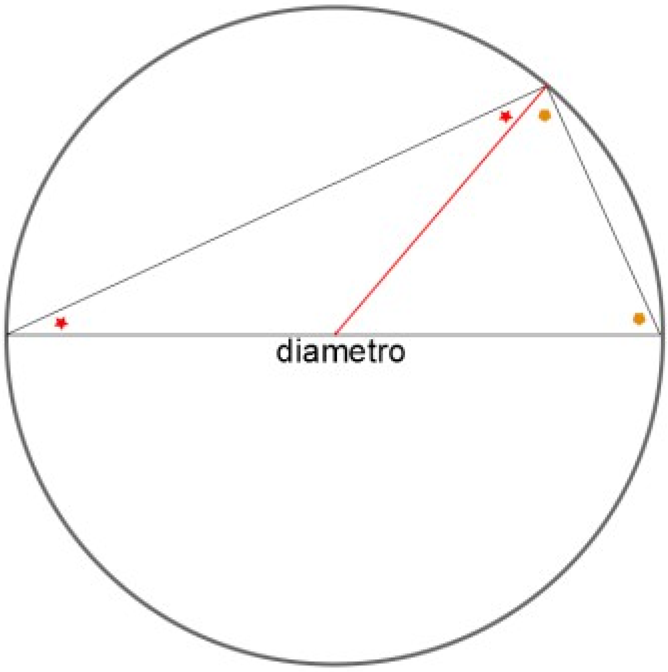
Per esempio Paul ai suoi allievi dava questo problema: un triangolo è contenuto in un rettangolo. L’area del triangolo quant’è rispetto a quella del rettangolo? Un mezzo? Due terzi? Non vale rispondere con la formula imparata a memoria.



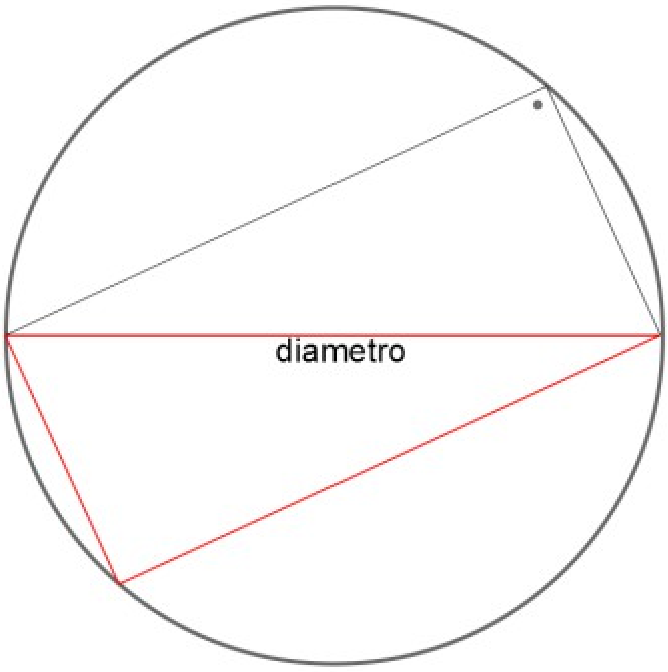
Tracciando l’altezza i due rettangoli risultanti sono tagliati a metà dal lato del triangolo, quindi la risposta è un mezzo.



Oppure quest’altro. Dimostrare che ogni triangolo disegnato in un semicerchio è rettangolo.

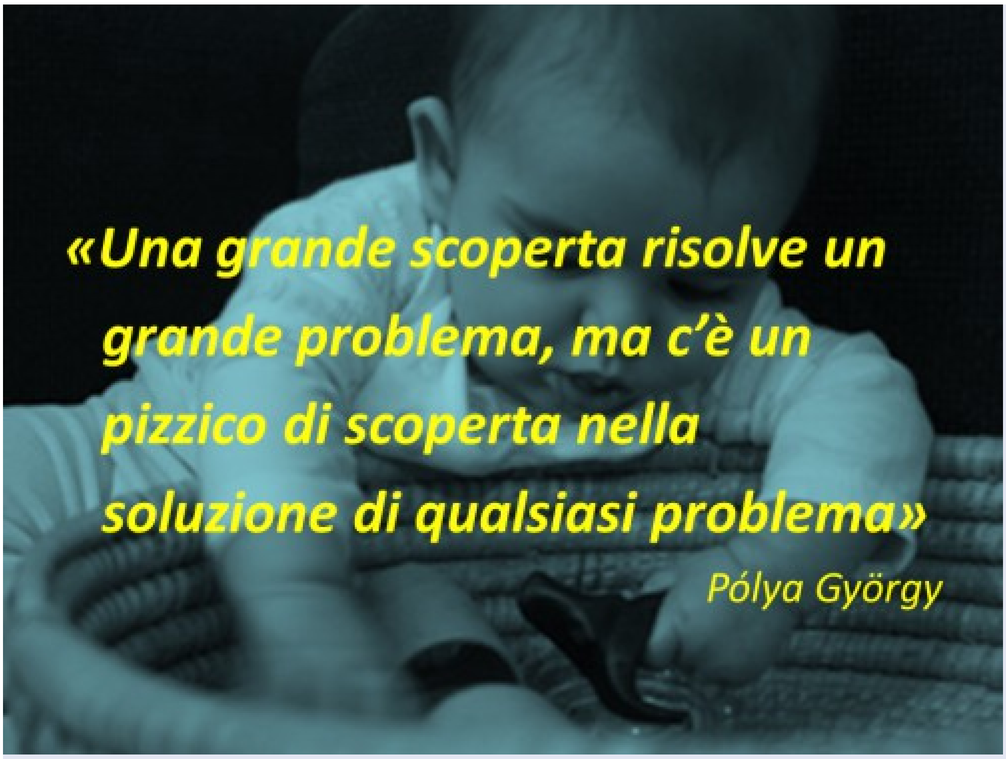


Non vale ripetere a pappagallo la dimostrazione che si trova nei libri, anche se è molto semplice. Così lo studente non impara nulla e quella dimostrazione sparirà dalla sua mente al primo alito di vento.



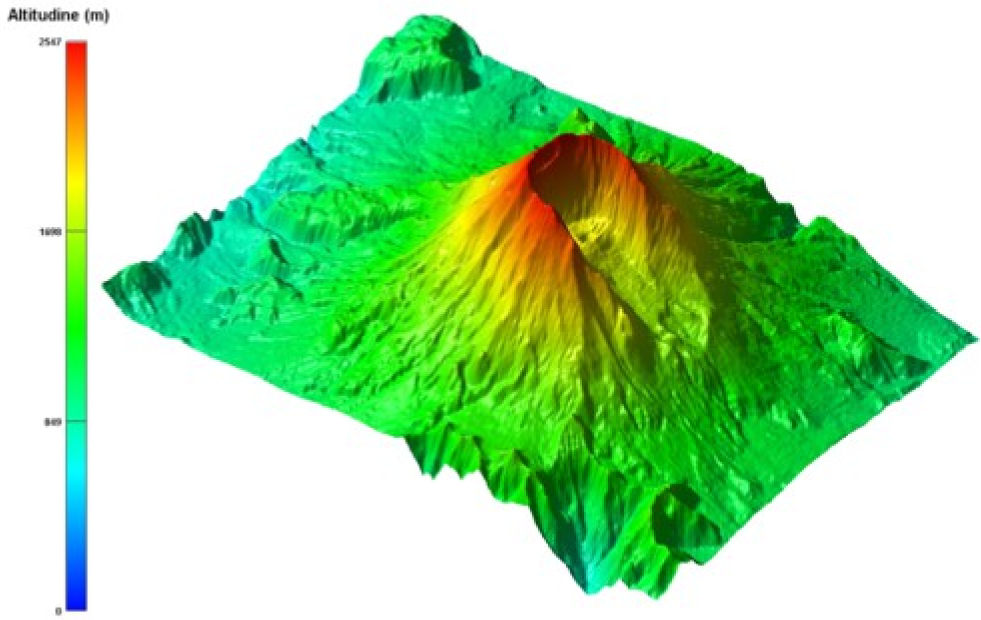
Nel suo libro Paul racconta come un suo allievo dopo molto manipolare triangoli, se ne è venuto fuori con una soluzione semplice e molto elegante basata completamente su considerazioni di simmetria.
Questo allievo, oltre a ricordarsi il teorema, si sforzerà di applicare lo stesso metodo anche ad altri problemi. Insomma, ha imparato davvero qualcosa.

Ma saper manipolare così i triangoli, saper vedere simmetrie nascoste si impara se si sono materialmente manipolati triangoli e figure geometriche.

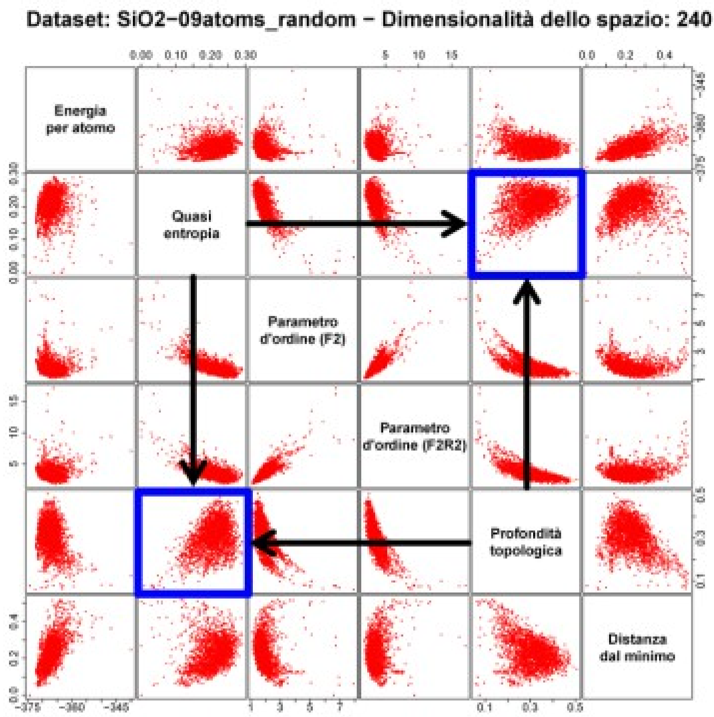


Non denigriamo le loro piccole scoperte.
Si fa tesoro delle risposte (solo) se ci si è scontrati autonomamente con le domande.
Tagliare il momento della domanda, della curiosità, significa togliere significato. E aumentare il rischio che l'apprendimento resti fugace e non lasci traccia sul lungo periodo.
Una difficoltà non piccola per l'insegnante: ascoltare i ragazzi. Evitare di trascinarli sulla via che abbiamo in testa noi per risolvere un dato problema, ma cercare di capire la loro via.
Forse il montessoriano "Aiutami a fare da solo" non si applica solo all'allacciarsi le scarpe.

Ma torniamo ai materiali. Abbiamo visto come materializzano un'astrazione, ma la possono materializzarla in forme differenti. Così è più probabile che il concetto si fissi.



Guarda caso un altro concetto che ritrovo quotidianamente nella pratica della visualizzazione.
Qui la stessa quantità, l’altitudine, è rappresentata con la superficie tridimensionale e codificata con un colore. Una codifica ridondante, ma che cerca di far arrivare meglio la comprensione dei numeri.



Un altro esempio. Perché le stesse variabili sono mostrate in due maniere differenti, anche se sono solo ruotate di 90 gradi?
Perché noi siamo molto più bravi a vedere simmetrie attorno ad un asse verticale che attorno a uno orizzontale.

Perché i materiali non rendono più simpatico l’apprendimento usando colori e disegnini? Perché dobbiamo sovraccaricare il sistema percettivo diluendo il concetto che stiamo passando in una marea di rumore e stimoli irrilevanti?
Chi si occupa di visualizzazione spesso quello che deve fare è togliere dettagli.

Questo ci porta di nuovo alla matematica e al rigore formale della materia.
Credo che molti di voi conoscano la storia di Srinivasa Ramanujan il genio matematico indiano che rischiò di non essere mai scoperto. Per farsi conoscere inviò alcuni risultati dei suoi studi a un matematico inglese che nemmeno li guardò, poi a un secondo che li restituì schifato per come si presentavano. Ma Ramanujan non si scoraggiò e li mandò allora a Hardy che passò oltre la forma e capì il genio nascosto.

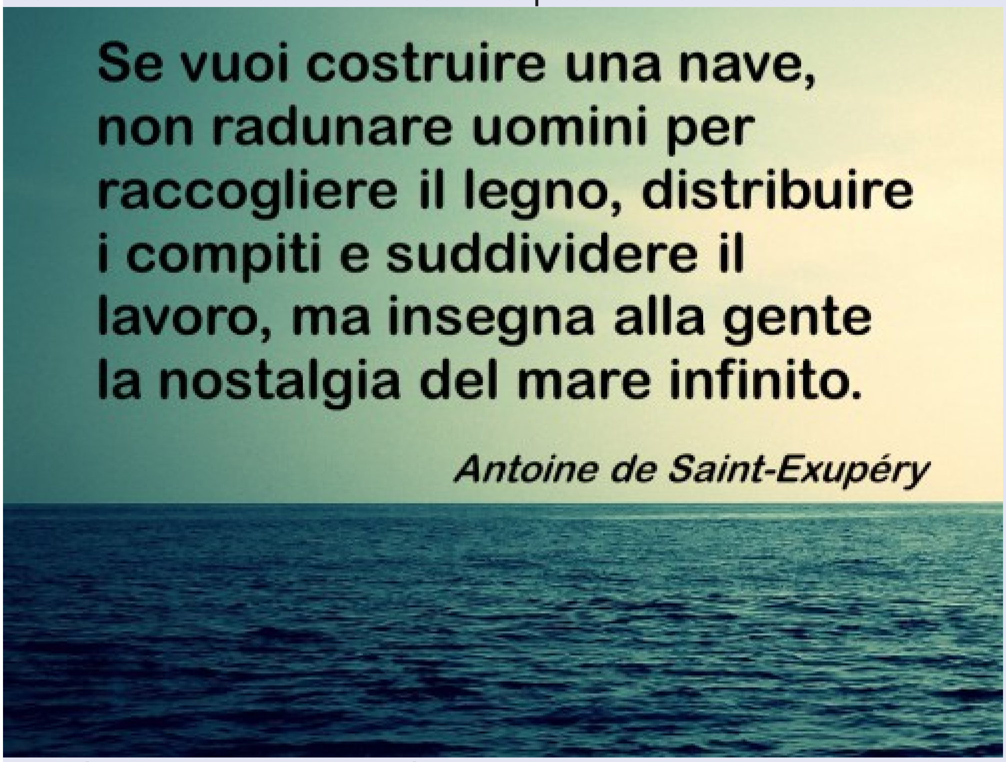
Una cosa è il rigore di sostanza (se/se e solo se; condizione necessaria/sufficiente) un’altra cosa è, invece, la pedanteria. Come le istruzioni per compilare la dichiarazione dei redditi che cominciano con le sanzioni invece che con le spiegazioni.
Tra l’altro Ramanujan era della regione dei Tamil Nadu, dove ogni mattina le donne tracciano con la polvere di riso sulla soglia di casa un disegno che si chiama Kolam che ha una struttura matematica affascinante.
Tracciando i loro Kolam le donne Tamil Nadu certamente non pensano che stanno utilizzando una grammatica generativa…

…come non sta pensando alle relazioni maggiore/minore questa bimba mentre infila anelli su perni della dimensione giusta.
Alla scuola Montessori i materiali aiutano questa esplorazione e aiutano l’autocorrezione. Questi non sono materiali didattici, sono materiali di sviluppo. La differenza è fondamentale.

Ma ci fanno capire quanto sia vera questa affermazione di Maria Montessori.
In parole mie, non dobbiamo imboccare a forza i bambini, dobbiamo solo trovare il cucchiaio adatto.
Ma se fate attenzione nella sua affermazione Maria Montessori non parla di formule e teoremi. Parla di esattezza e ordine. Se ci pensiamo bene, forse il fine dell'insegnamento della matematica a scuola non è forgiare geni ma persone.

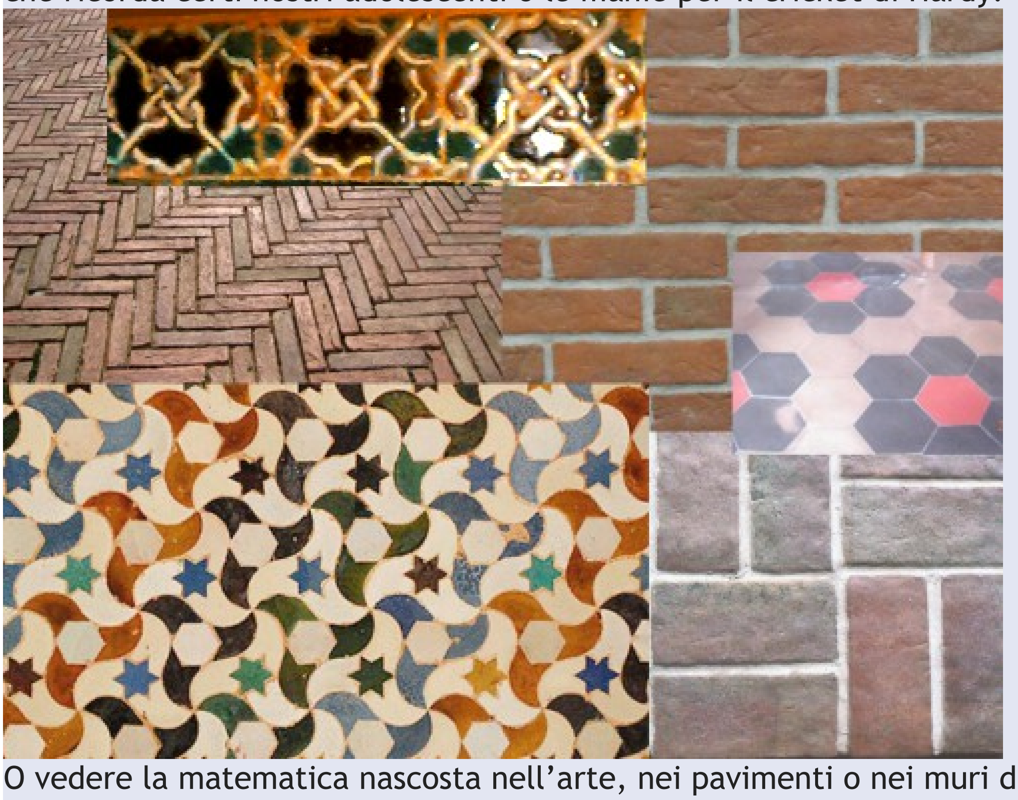
Per questo non mi stupisce vedere un bambino del nido rimettere in ordine da solo i materiali che ha usato.

E non stupisce trovare le aule sempre ben ordinate. Non è mania, né qualcosa fine a se stesso. È ricordare visivamente un aspetto della mente matematica dei bambini.

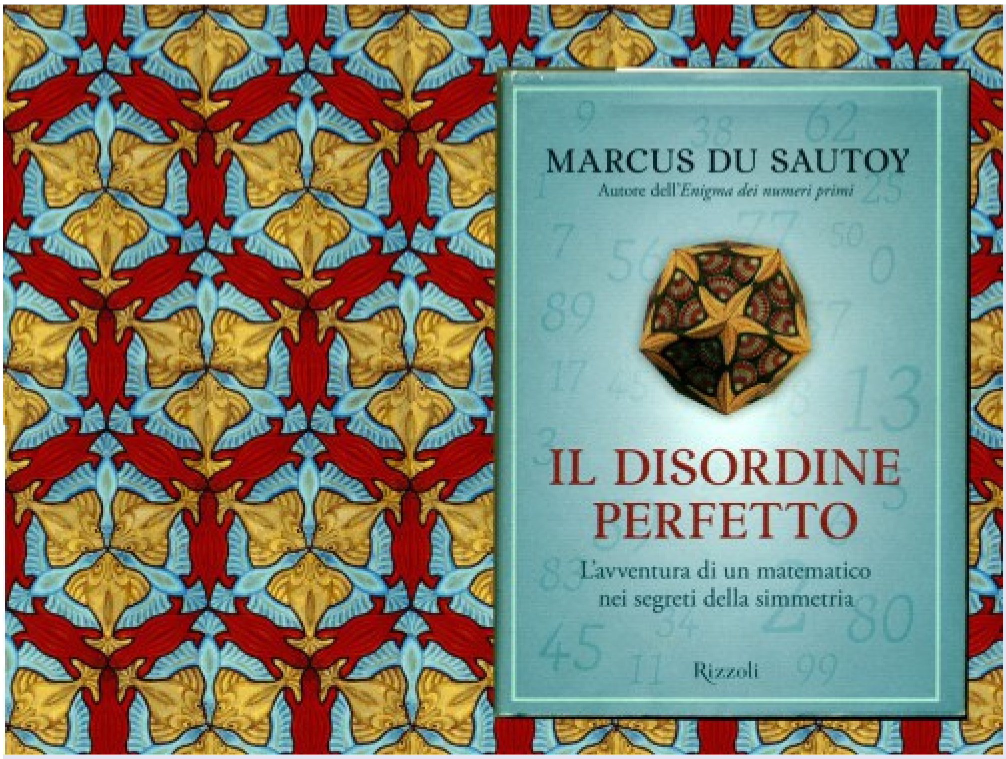


Ma c'è un altro aspetto che è comune alla matematica e a qualsiasi altra materia. Prima di scendere nei tecnicismi bisogna far amare l'argomento. Come dice Saint-Exupéry: prima di spiegare come si costruisce una nave, fai venire nostalgia del mare infinito.

Perché allora non appassionarli alle storie dei matematici. A scuola sembra che nessuno abbia scritto i teoremi, sembra di studiare geografia: laghi e fiumi, ma non persone. Invece perché non appassionarsi alla triste storia di Galois, ed entusiasmarsi per i suoi ideali da giovane ribelle. I matematici sono persone umane, non sono teoremi! O Abel che ricorda certi nostri adolescenti o le manie per il cricket di Hardy.



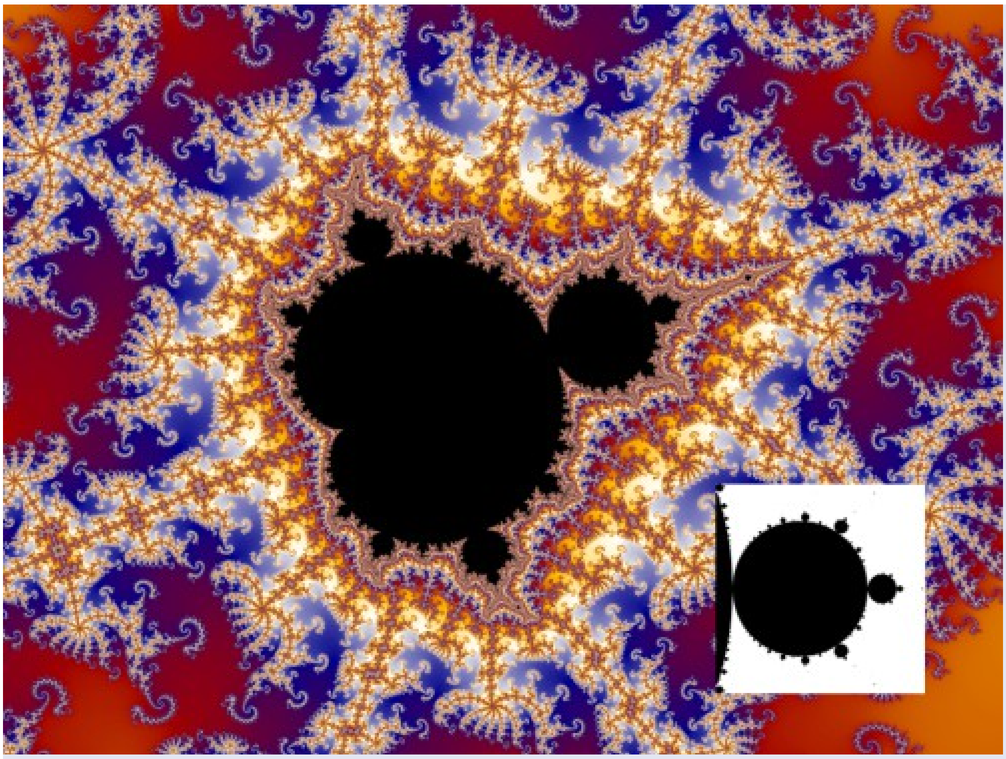
O vedere la matematica nascosta nell’arte, nei pavimenti o nei muri di mattoni. Esempi di simmetrie che abbiamo tutto attorno a noi.



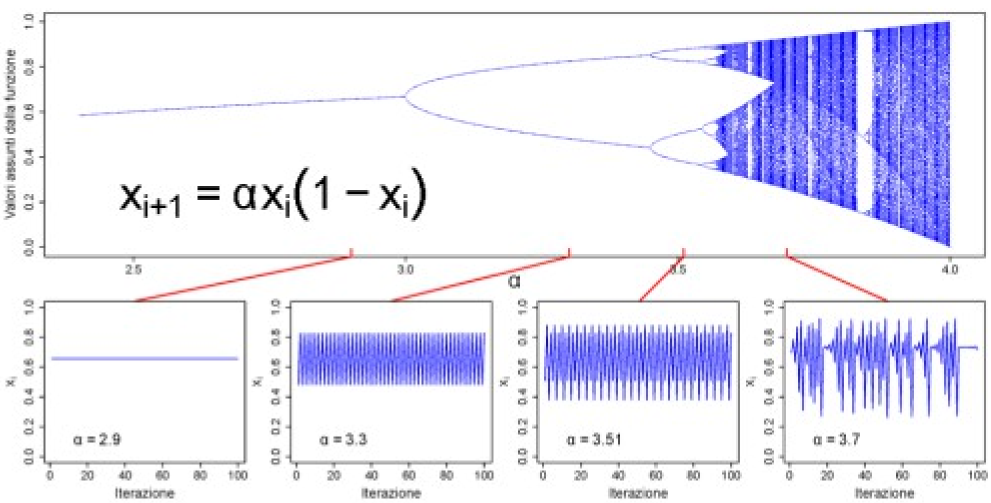
In questo libro l'autore parla anche del suo lavoro come matematico e di come con suo figlio cercavano tutto intorno a loro le simmetrie nelle pavimentazioni. Ce ne sono 17 e solo 17. Erano arrivati a sedici quando, in un parcheggio, mi sembra in Sicilia, il figlio esulta perché ha trovato la diciassettesima simmetria.

Non è solo un esercizio arido, perché vuol dire insegnare ad essere presenti, a essere consapevoli di quello che ci circonda e perché no, ad accogliere una bella sfida.

Simmetrie strane come la simmetria di scala che fa sì che una parte di un oggetto sia simile al tutto, come accade nel broccolo romanesco o nei vasi sanguigni o le montagne e le nuvole.

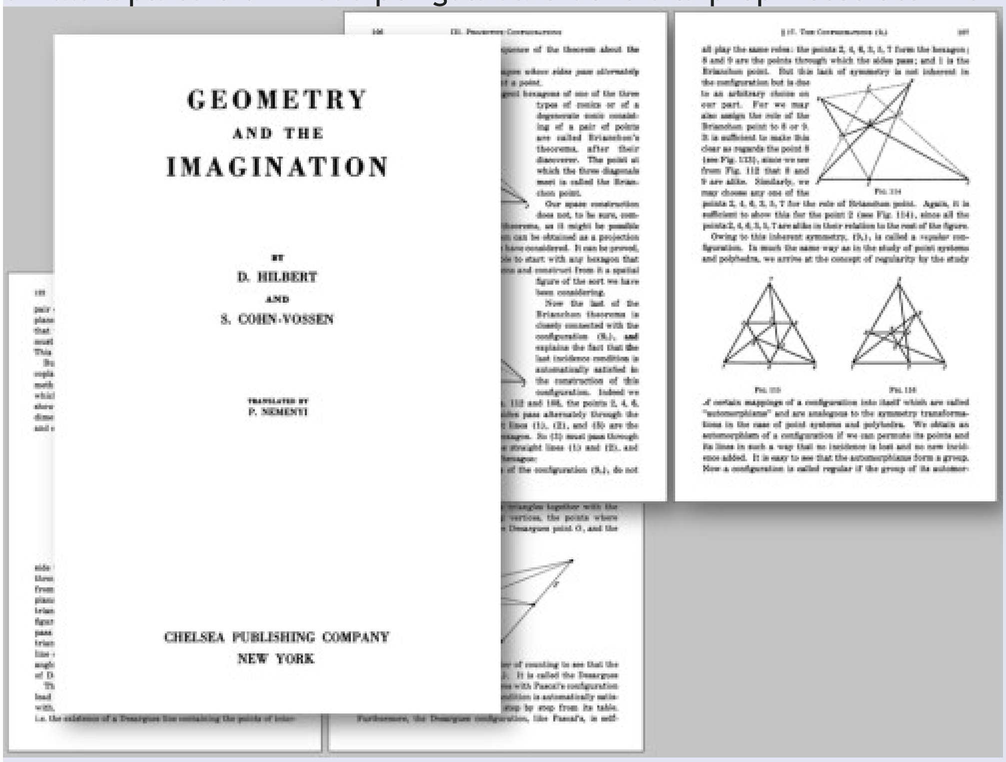


La simmetria di scala porta all'autosomiglianza che si trova in oggetti molto matematici come i frattali che magari ammiriamo per la loro complessa bellezza, senza cercare di andare un attimo sotto la superficie.



Ci si può andare anche con una calcolatrice da tasca come accade con le funzioni iterate.
Sono semplici, anche uno delle medie le può capire, ma variando nell'esempio il parametro alfa, la funzione mostra comportamenti inaspettati.

Sempre la scuola di Oggiona, classe prima.
Da queste operazioni mentali si vede la strategia e il lavoro nella mente. Guardare da un’altra parte è un modo per guardare dentro ai propri costrutti mentali.



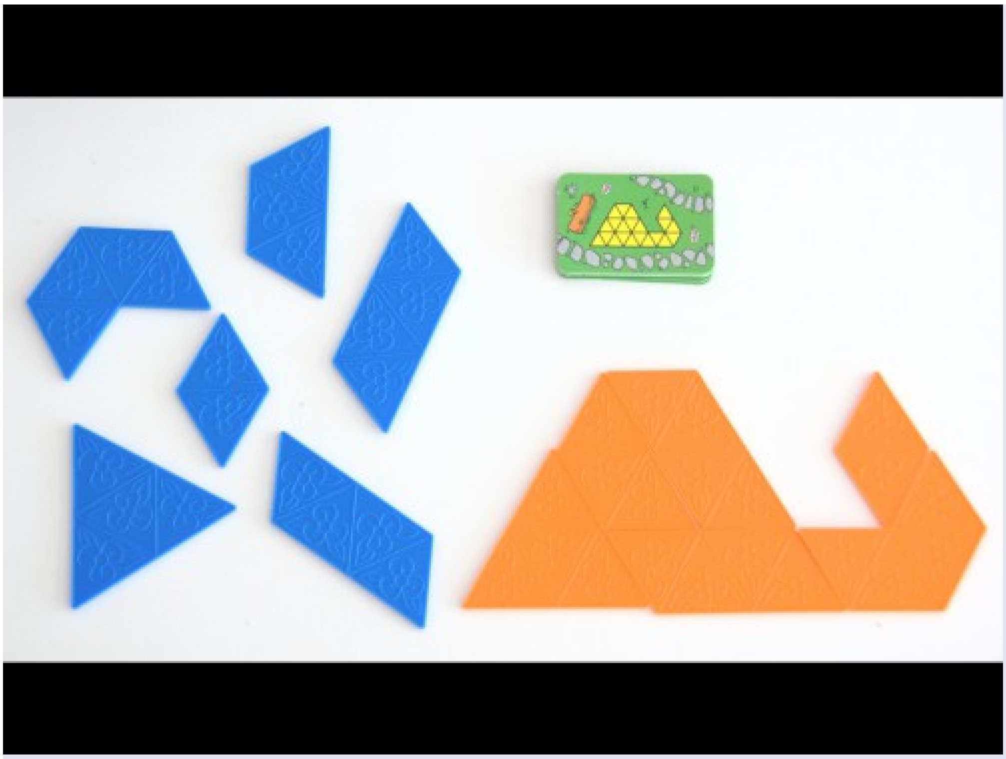
GEOMETRY
AND THE
IMAGINATION

BY
D. HILBERT
AND
S. COHN-VOSSEN

TRANSLATED BY
P. NEMENYI

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK

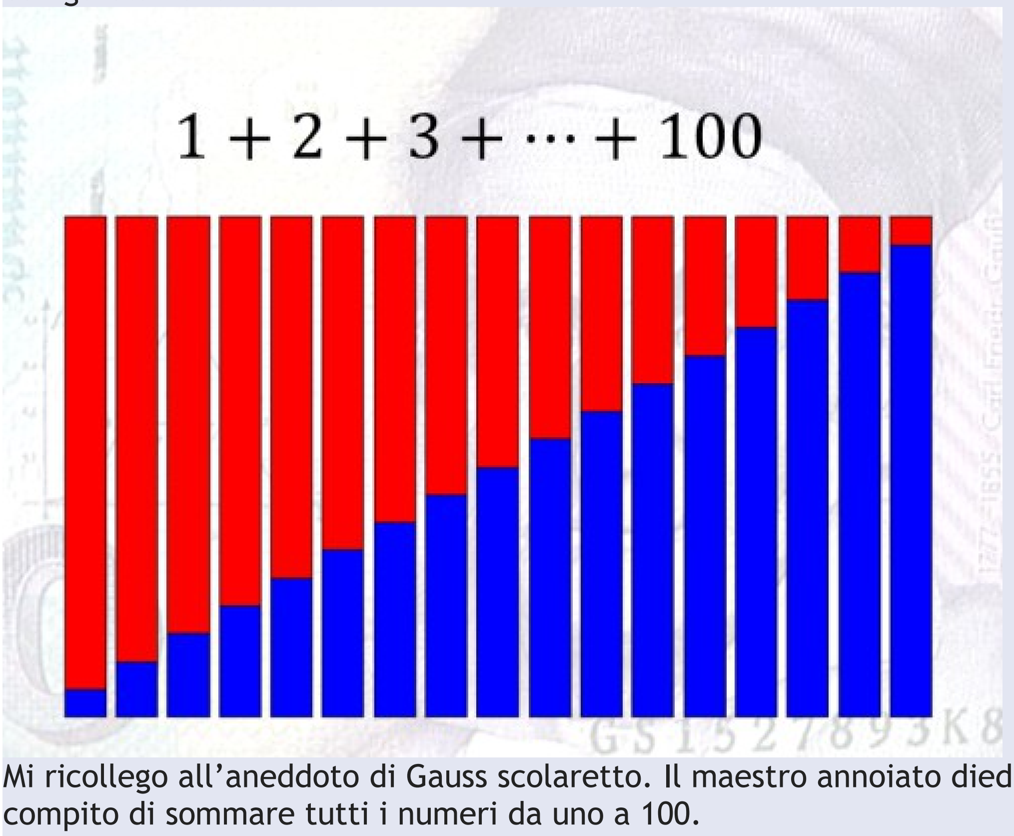
Non molto diverso da quello che fa un matematico di fronte a schemi e immagini come queste.
Tanto importante è questo modo di lavorare che il grande Hilbert ha scritto un intero libro su Geometria e Immaginazione. Se qualcuno mi dice che geometria non è matematica gli dico di andare a leggersi come la geometria si riconduce alla teoria dei gruppi, per esempio.



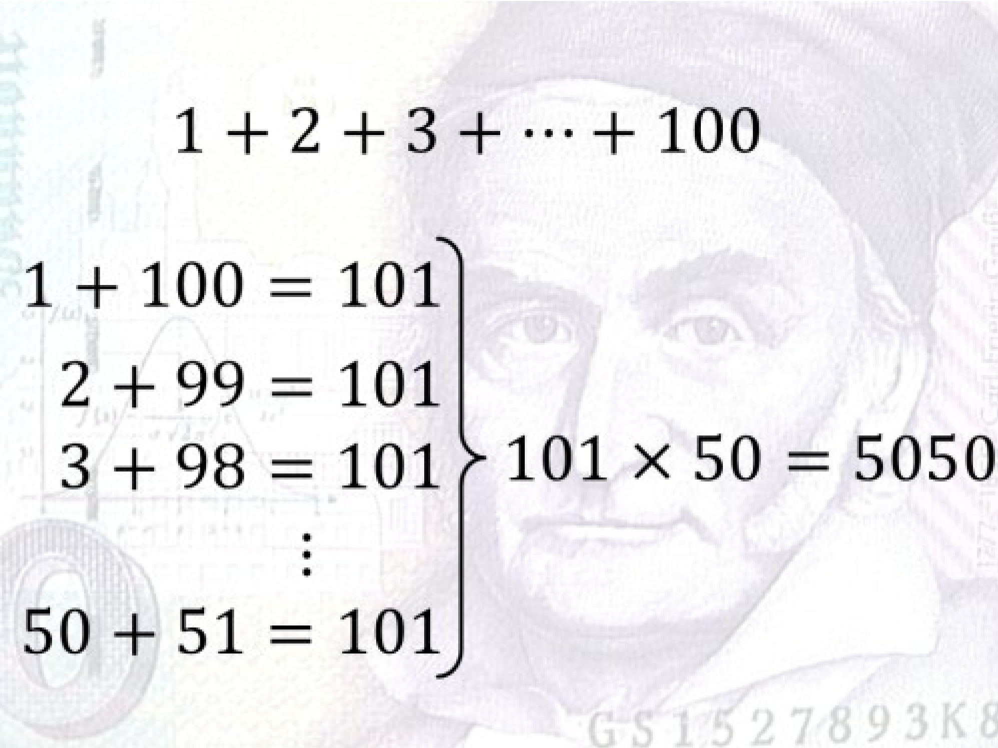
A questo punto anche un giochino dell'uovo di Pasqua come questo o il più noto Tangram sono esercizi matematici.

E allora ben vengano le manipolazioni degli incastri che si fanno alla Casa dei Bambini. Non da ultimo perché la manipolazione di immagini e modelli nella nostra mente avviene proprio come se manipolassimo oggetti con le mani.

Qui in una scuola Montessori francese gli incastri e le manipolazioni si fanno addirittura con gli elementi chimici.



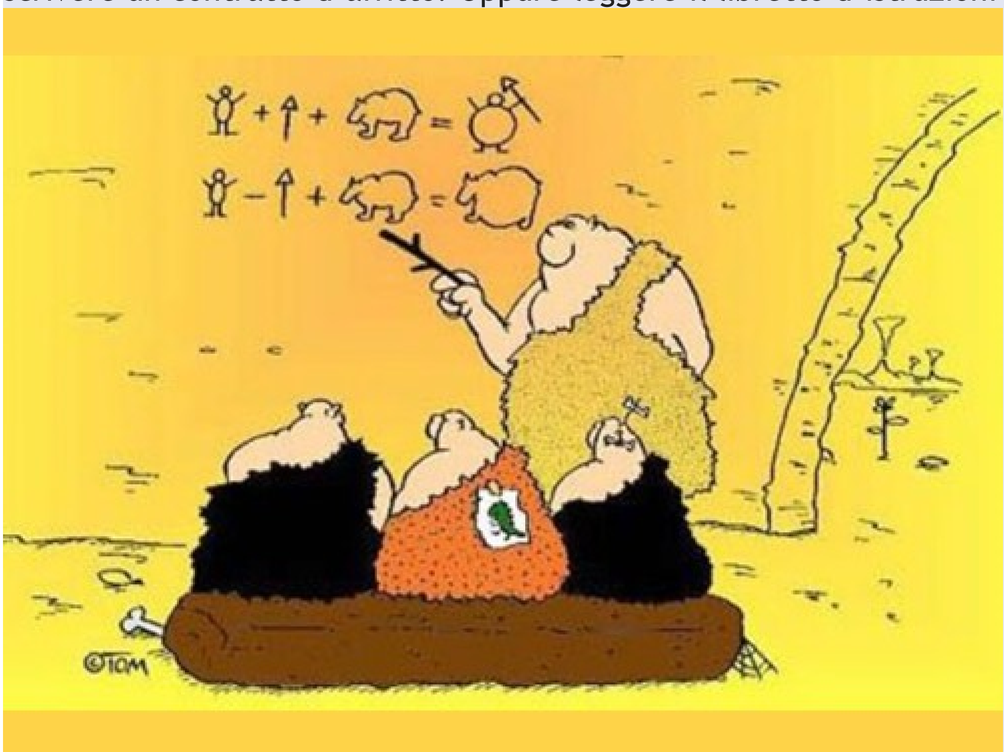
Mi ricollego all'aneddoto di Gauss scolaretto. Il maestro annoiato diede alla classe il compito di sommare tutti i numeri da uno a 100.
Gauss finì subito perché notò che ci sono 50 coppie che valgono 101 quindi la somma è 5050. Probabilmente l'ispirazione arrivò da un'immagine mentale simile a quella riportata in figura.



Dopo averlo scoperto con l’immagine mentale di cui sopra, probabilmente lo ha tradotto in somme come queste.

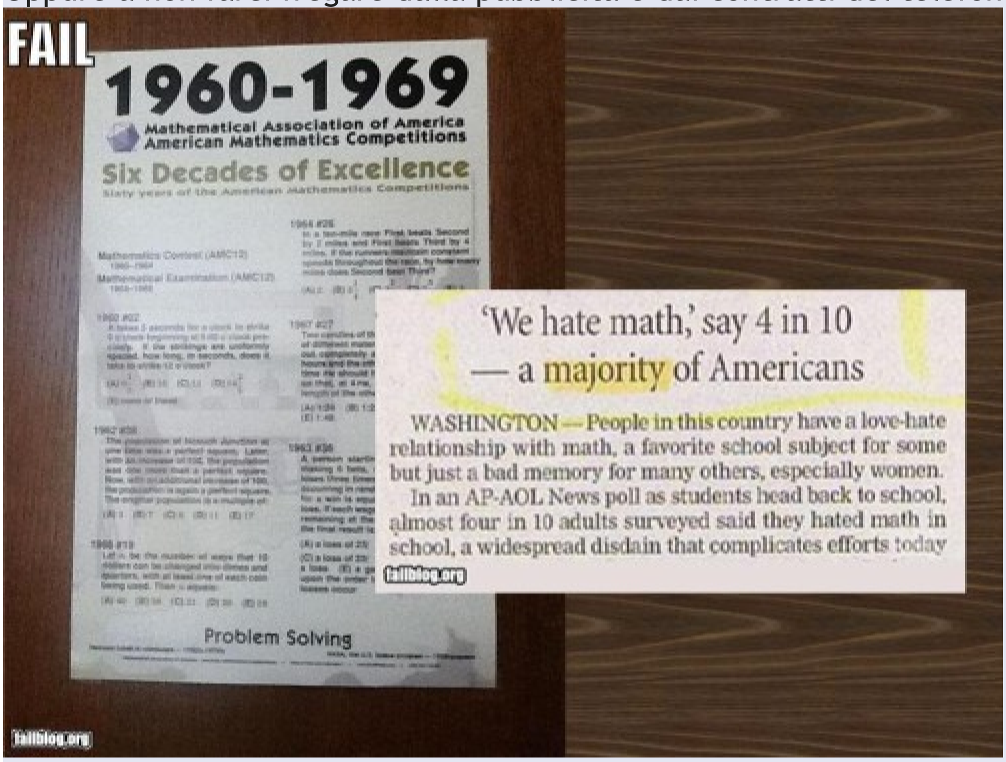
Ancora operazioni mentali, questa volta di studenti di seconda sempre della scuola di Oggiona. Notate che arrivano al 365, mentre i programmi ministeriali impongono il 100. Quando si capisce, si è liberi.
Osservate come suddivide 45 meno 9 in 45 meno 5 che fa 40 e poi toglie 4. Sta operando nella mente sull’immagine della linea del 20 di Camillo Bortolato! Io per esempio avrei fatto 45 meno 10 più uno.

Arrivati a questo punto, sorge spontanea una domanda: a cosa serve imparare la matematica?
Soprattutto ai ragazzi non possiamo dire: “Studia che ti servirà” perché vivono nel presente.
E poi non capisco perché questa esigenza nasca solo per la matematica e mai nessuno si fa problemi per l’italiano per esempio. Perché per rendere “utile” l’italiano non gli si fa scrivere un contratto d’affitto? Oppure leggere il libretto d’istruzioni dell’automobile?



La matematica serve solo a superare le interrogazioni e gli esami?

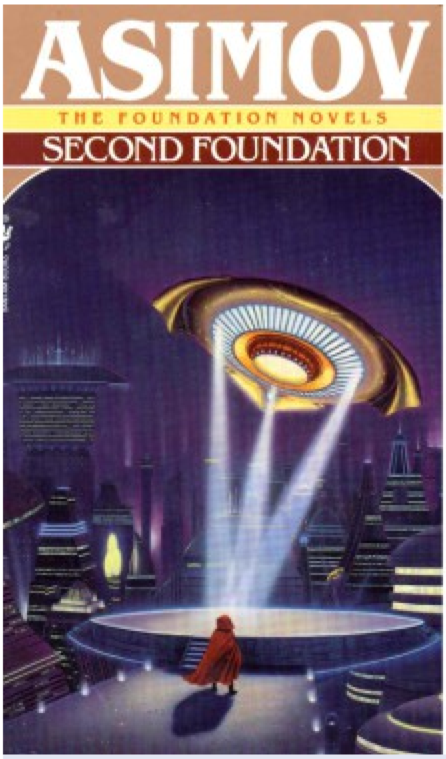
Oppure a non farci fregare dalla pubblicità e dai contratti del telefonino?



O a evitare figure vergognose come queste due che ho trovato in rete?

La matematica a mio avviso “serve” ad acquisire competenza matematica, cioè il senso dei numeri, che cosa rappresentano. Una volta, quando gli ingegneri giravano col loro bravo regolo calcolatore, girava la battuta “due per tre fa circa sei” perché il regolo non era preciso. Ma era molto più importante sapere, sentire, che cosa rappresentava quel sei.

Possiamo quindi dire che la competenza matematica ci serve per capire il mondo in cui viviamo, per non essere solo degli “schiaccia-bottoni” e anche per scegliere liberamente se ci interessa la matematica a un livello superiore oppure no.



«Per qualche motivo Trevize aveva sempre pensato che se si fosse dovuto comunicare mentalmente con un computer, si sarebbe usata una cuffia, con elettrodi collegati agli occhi e al cranio.

Le mani?

E perché non le mani? Si sentì fluttuare lontano e avvertì una certa sonnolenza, ma non perse minimamente la sua lucidità mentale. Perché non le mani?

Gli occhi erano solo organi di senso. Il cervello era unicamente il quadro di comando centrale, racchiuso nel cranio e lontano dalla superficie operativa del corpo. La superficie operativa era rappresentata dalle mani: erano le mani che tastavano e manipolavano l'Universo.

Gli esseri umani pensavano con le mani. Erano le mani la risposta alla curiosità intellettuale, erano esse a toccare, stringere, rivoltare, alzare, sollevare. C'erano animali dal cervello piuttosto grande, che però erano privi di mani. E la differenza era importante, molto importante.»

E sempre senza scordarsi delle nostre mani. Anche in un futuro lontanissimo, come quello immaginato da Asimov nel suo ciclo delle fondazioni, Golan Trevize si accorge che per connettersi col calcolatore della sua astronave ha bisogno delle mani.

Queste idee e altre le stiamo raccogliendo in un libro, che è quasi pronto. Manca solo la casa editrice…

Io spero che allargando gli orizzonti, collegando materie e discipline, raccontando storie avvincenti e utilizzando al meglio la nostra testa, possa tornare quel tempo in cui la matematica ci restituiva un "Sense of Wonder" il senso di meraviglia che dovrebbero trasmetterci la scienza e la natura attorno a noi.
Possiamo brindare a questa nuova comprensione con un bel bicchiere di **π**, vino spagnolo rosso. Nel frattempo vi ringrazio per l'attenzione.

Se volete avventurarvi a vedere qualcosa del mio lavoro, ritornate su mariovalle.name oppure scrivetemi.